Universidad Nacional del Litoral
FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS HÍDRICAS

Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

Examen Parcial – 3/5/13

Apellido y nombre:

DNI:

1. Hallar los valores principales y direcciones principales correspondientes para el tensor $\mathbf{T}$ cuyas componentes, en algún sistema coordenado, son:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificar que todas las direcciones principales son mutuamente ortogonales. Dar la matriz de rotación de ejes que llevaría la matriz de componentes de $\mathbf{T}$ a tener forma diagonal. Justificar.

2. Mostrar, usando álgebra indicial, que

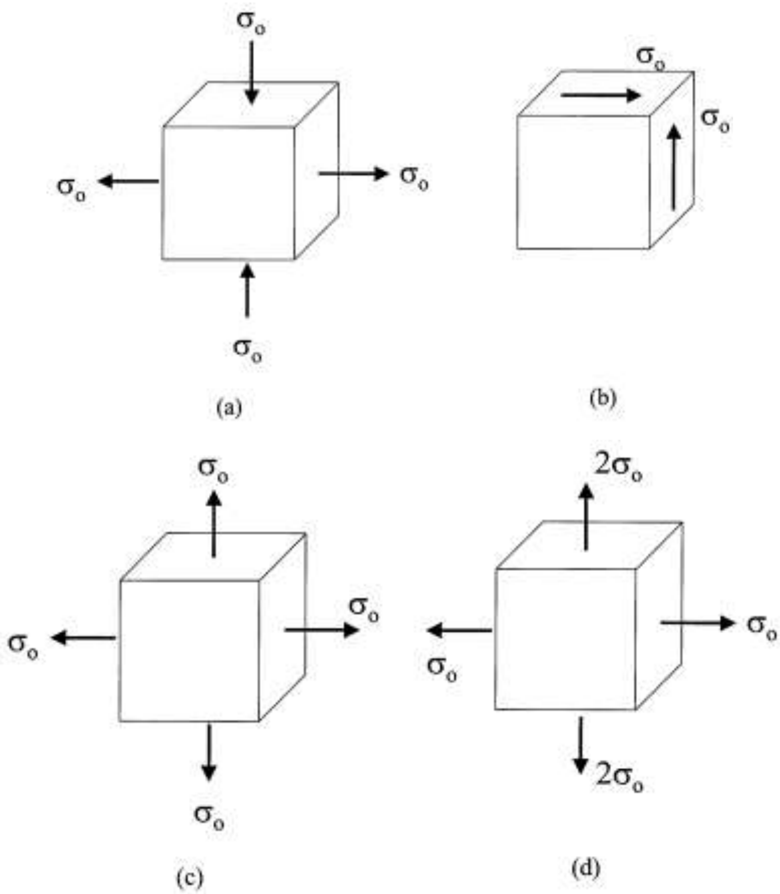
$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \bullet \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \bullet \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{v}(\nabla \bullet \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \bullet \nabla)\mathbf{v}$$

3. Sea un cuerpo para el cual el estado de tensiones en un punto P tiene componentes, en algún sistema coordenado, dadas por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde σ_{11} es desconocido. Determinar la dirección $\mathbf{n}$ para la cual el vector de tensiones $\overset{\mathbf{n}}{\mathbf{T}}$ actuando en P sobre un plano perpendicular a $\mathbf{n}$, es nulo (o sea, $\overset{\mathbf{n}}{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$). Determinar además el valor que debe tener σ_{11} para que esta condición pueda verificarse.

4. Sea un cubo orientado según los ejes coordenados, sometido a los estados de tensiones graficados abajo.



Para cada uno de los casos indicados,

a. Graficar el círculo de Mohr correspondiente.
b. Calcular las tensiones y direcciones principales.
c. Calcular dirección y magnitud de la máxima tensión de corte.

1)

$$\det(T - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} (5/2-\lambda) & -1/2 & 0 \\ -1/2 & (5/2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (4-\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\left(\frac{5}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right](4-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\frac{25}{4} - 5\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 3$$
$$\lambda_3 = 2$$

i)

$$\left(\frac{5}{2}-4\right)V_1^1 - \frac{1}{2}V_2^1 = 0$$
$$-\frac{1}{2}V_1^1 + \left(\frac{5}{2}-4\right)V_2^1 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} V_1^1 = 0 \\ V_2^1 = 0 \\ V_3^1 = 1 \end{matrix}$$

ii)

$$\left(\tfrac{5}{2}-3\right) v_1^2 - \tfrac{1}{2} v_2^2 = 0$$
$$-\tfrac{1}{2} v_1^2 + \left(\tfrac{5}{2}-3\right) v_2^2 = 0$$
$$v_3^2 = 0$$

$$-\tfrac{1}{2} v_1^2 - \tfrac{1}{2} v_2^2 = 0 \Rightarrow v_1^2 = -v_2^2$$
$$v_1^2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad v_2^2 = -\sqrt{2}/2$$

iii) $$\left(\tfrac{5}{2}-2\right) v_1^3 - \tfrac{1}{2} v_2^3 = 0$$
$$-\tfrac{1}{2} v_1^3 + \left(\tfrac{5}{2}-2\right) v_2^3 = 0$$
$$v_3^3 = 0$$
$$\tfrac{1}{2} v_1^3 - \tfrac{1}{2} v_2^3 = 0 \Rightarrow v_1^3 = v_2^3 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\lambda_1, \underline{v}^1) = \left(4, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad (\lambda_2, \underline{v}^2) = \left(3, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$(\lambda_3, \underline{v}^3) = \left(2, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{v}^1 \circ \underline{v}^2 = 0$$

$$\underline{v}^1 \circ \underline{v}^3 = 0$$

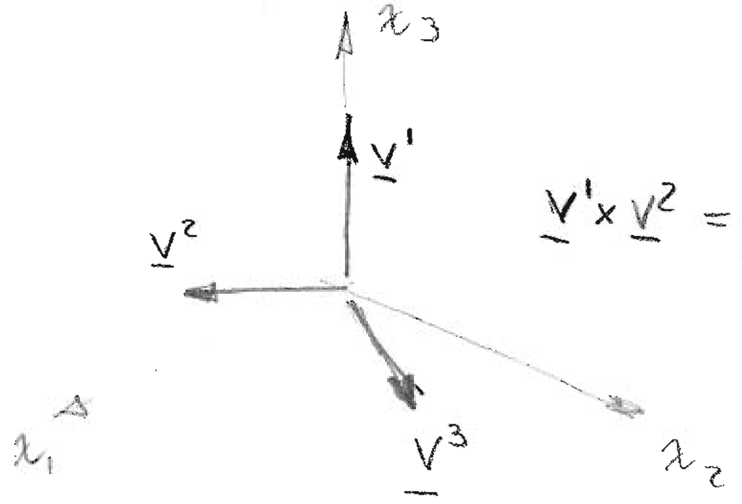
$$\underline{v}^2 \circ \underline{v}^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Verif ortog ✓

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \left[v^1 \; v^2 \; v^3 \right] = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VERIF:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & 5/2 & -1/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
 & & & -1/2 & 5/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
 & & & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\
\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & 3 & 0 \\
\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}$$



$$\underline{v}^1 \times \underline{v}^2 = \underline{v}^3$$

Verif regla mano derecha (rotación)

2)

$$\underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{u}(\underline{\nabla} \circ \underline{v}) + (\underline{v} \circ \underline{\nabla})\underline{u} - \underline{v}(\underline{\nabla} \circ \underline{u}) - (\underline{u} \circ \underline{\nabla})\underline{v}$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{klm} u_l v_m) = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_l v_m) =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_l v_m) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_m}(u_i v_m) - \frac{\partial}{\partial x_l}(u_l v_i) =$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_m} v_m + u_i \frac{\partial v_m}{\partial x_m} - \frac{\partial u_l}{\partial x_l} v_i - u_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l}$$

$$(\underline{v} \bullet \underline{\nabla})\underline{u} + \underline{u}(\underline{\nabla} \bullet \underline{v}) - \underline{v}(\underline{\nabla} \circ \underline{u}) - (\underline{u} \circ \underline{\nabla})\underline{v}$$

3)

$$\overset{n}{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore$

$$\sigma_{11} n_1 + 2 n_2 + n_3 = 0$$

$$2 n_1 + 2 n_3 = 0 \quad \Rightarrow n_3 = -n_1$$

$$n_1 + 2 n_2 = 0 \quad n_2 = -\frac{n_1}{2}$$

$$n_1^2 + \left(-\frac{n_1}{2}\right)^2 + \left(-n_1\right)^2 = 1$$

$$n_1^2 \left(1 + \frac{1}{4} + 1\right) = 1$$

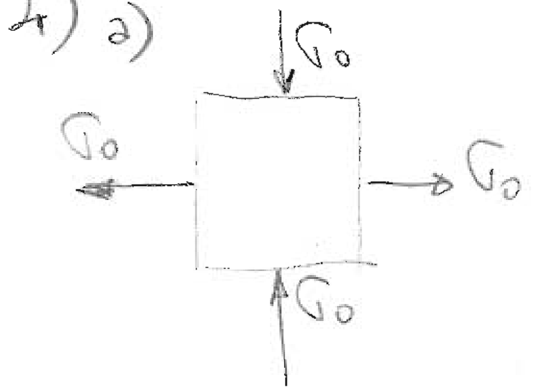
$$n_1 = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

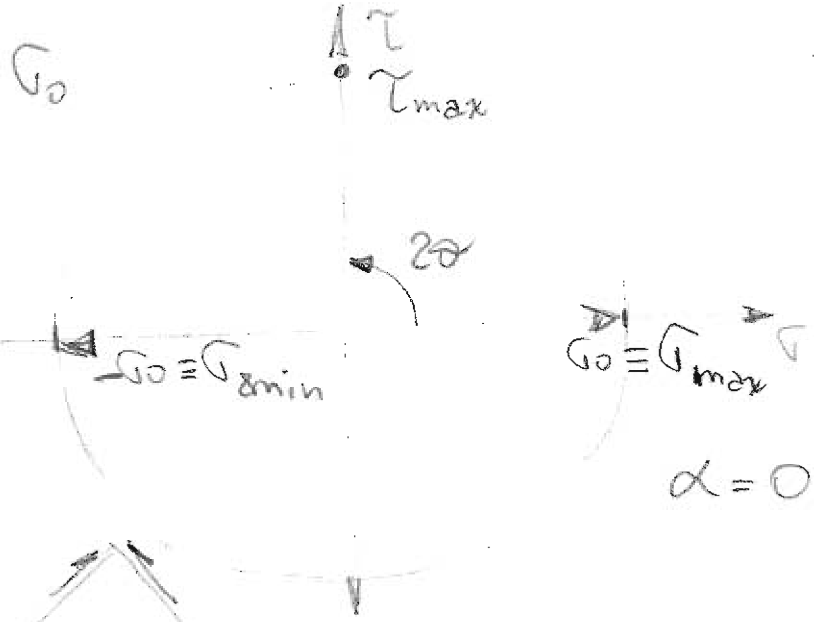
$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} \frac{2}{3} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\sigma_{11} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$$

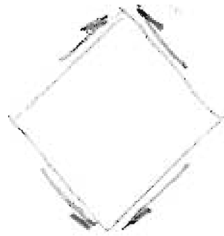
4) a)



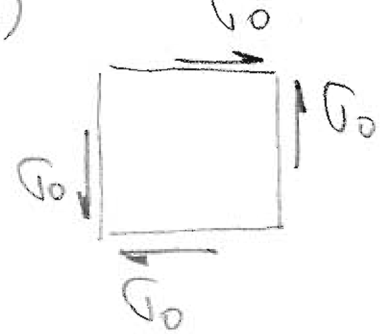


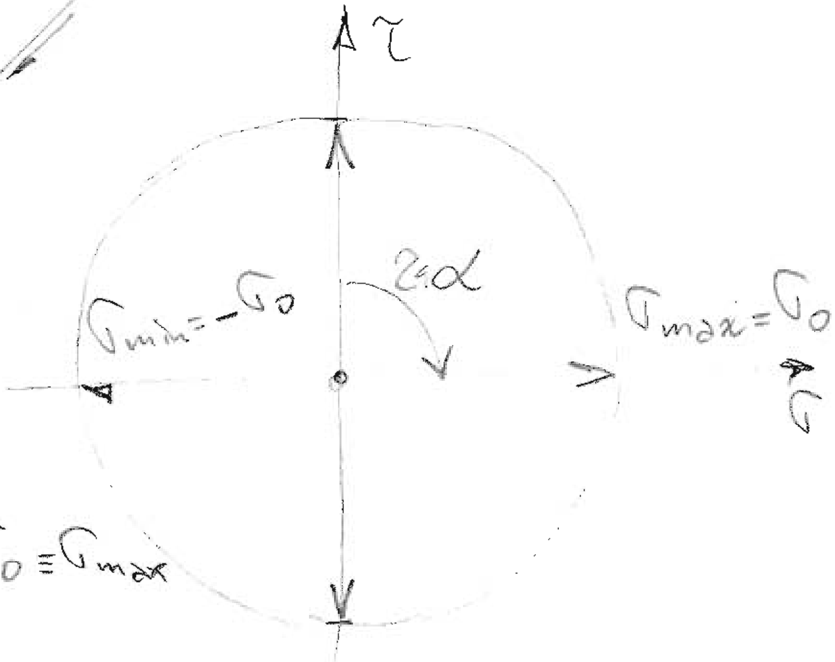
$\tau_{max} = \sigma_0$

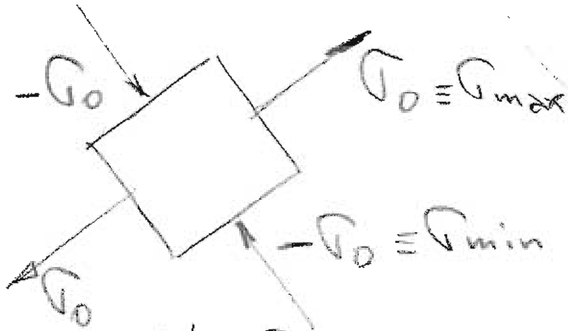
$\theta = \frac{\pi}{4}$



b)





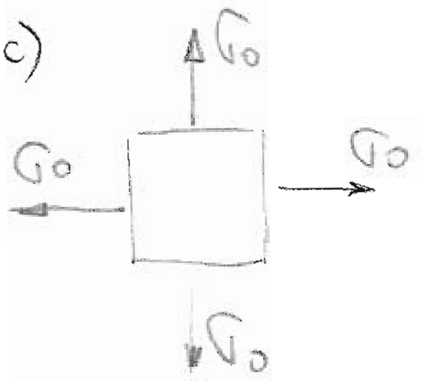


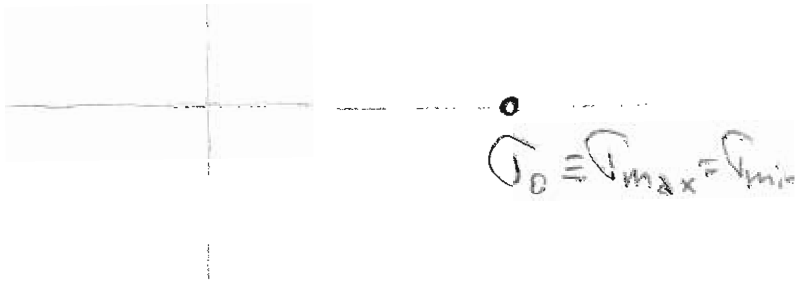
$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$\tau_{max} = \sigma_0$

$\theta = 0$

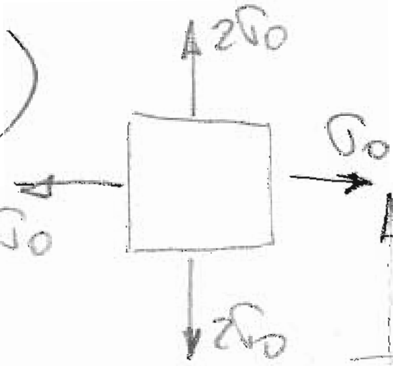
c)

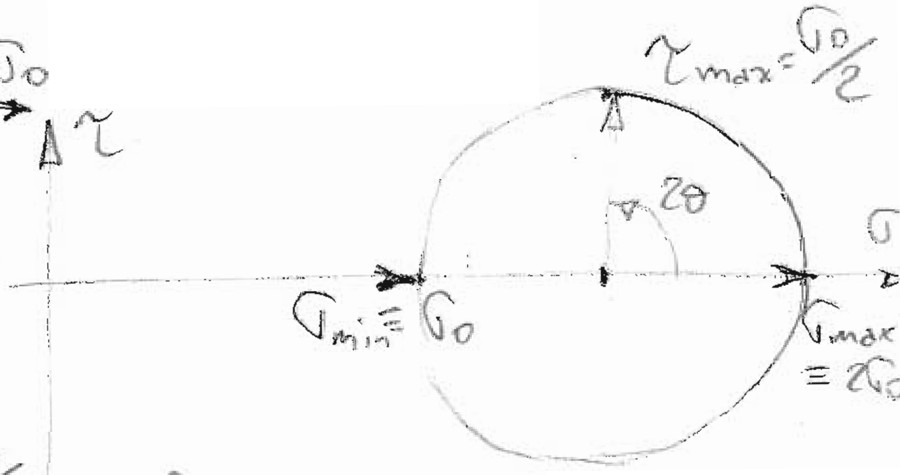




$\tau_{max} = 0$

d)





$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$