Sistema de masas y resortes

Consideremos el sistema de partículas unidas por resortes cuya configuración inicial es la que se observa en la Figura 1.

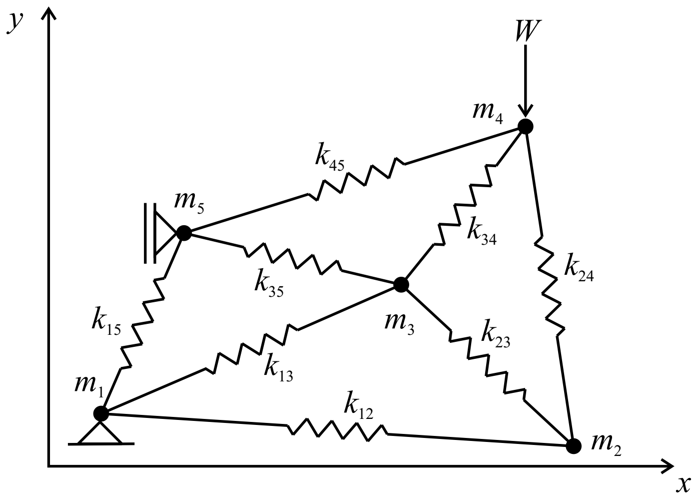

Figura 1: Configuración inicial del sistema de masas y resortes.

Se desea determinar la evolución de la posición de las partículas con el tiempo a partir de la aplicación de la carga $\boldsymbol{W}$ en la partícula 4.

1. Ley de Newton

Ahora, planteemos la Ley de Newton para cada partícula:

- Partícula 1:

$$\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{15} = m_1 \boldsymbol{a}_1 \tag{1}$$

- Partícula 2:

$$-\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{23} + \boldsymbol{F}_{24} = m_2 \boldsymbol{a}_2 \tag{2}$$

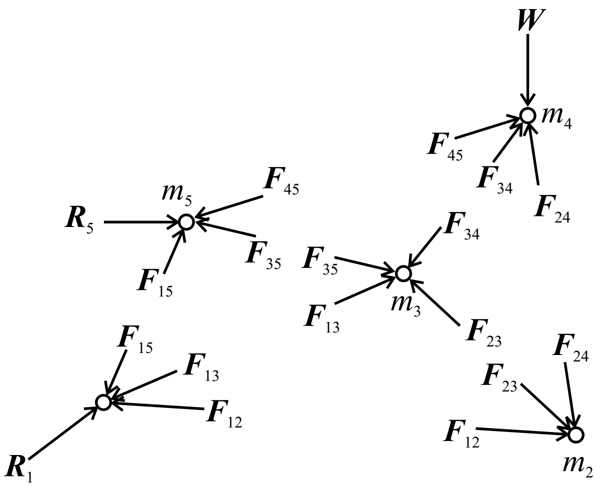

Figura 2: Fuerzas actuantes sobre las partículas.

- Partícula 3:

$$-\boldsymbol{F}_{13} - \boldsymbol{F}_{23} + \boldsymbol{F}_{34} + \boldsymbol{F}_{35} = m_3 \boldsymbol{a}_3 \tag{3}$$

- Partícula 4:

$$-\boldsymbol{F}_{24} - \boldsymbol{F}_{34} + \boldsymbol{F}_{45} + \boldsymbol{W} = m_4 \boldsymbol{a}_4 \tag{4}$$

- Partícula 5:

$$\boldsymbol{R}_5 - \boldsymbol{F}_{15} - \boldsymbol{F}_{35} - \boldsymbol{F}_{45} = m_5 \boldsymbol{a}_5 \tag{5}$$

donde el vector $\boldsymbol{R}_i$ es la reacción en el apoyo i, el vector $\boldsymbol{F}_{ij}$ es la fuerza aplicada sobre la partícula i por el resorte que une las partículas i y j (opuesta a la fuerza $\boldsymbol{F}_{ji}$ que aplica ese resorte sobre la partícula j ubicada en el otro extremo, o sea $\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$), el escalar m_i es la masa de la partícula i y el vector $\boldsymbol{a}_i$ su aceleración.

Llamemos $\boldsymbol{x}_i = [x_i \; y_i]^T$ a la posición de la partícula i. Luego, la aceleración puede calcularse como la derivada segunda de la posición con respecto al tiempo t:

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} \tag{6}$$

2. Definición de las fuerzas

Suponiendo que los resortes son perfectamente elásticos, la magnitud F_{ij} de la fuerza $\boldsymbol{F}_{ij}$ aplicada en la partícula i por el resorte que une las partículas i y

j es proporcional al alargamiento ΔL_{ij} del resorte:

$$F_{ij} = k_{ij}\Delta L_{ij} = k_{ij}\left(\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\| - \|\boldsymbol{x}_j^0 - \boldsymbol{x}_i^0\|\right) \tag{7}$$

donde el factor de proporcionalidad k_{ij} de conoce como rigidez del resorte, $\boldsymbol{x}_i^0$ es la posición inicial de la partícula i, y $\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ es la longitud del vector $\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i$.

Nótese que si el resorte se acortara, tendríamos $\Delta L_{ij} < 0$ y $F_{ij} < 0$, y las fuerzas $\boldsymbol{F}_{ij}$ y $\boldsymbol{F}_{ji}$ tenderían a restituir el resorte a su posición original, y por ende, a alejar a las partículas i y j, como se muestra en la Figura 3. Esta observación nos lleva a definir completamente el vector $\boldsymbol{F}_{ij}$ como:

$$\boldsymbol{F}_{ij} = F_{ij}\frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\|} = k_{ij}\left(1 - \frac{\|\boldsymbol{x}_j^0 - \boldsymbol{x}_i^0\|}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\|}\right)(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \tag{8}$$

o, por componentes, como:

$$F_{ij_x} = k_{ij}\left(1 - \frac{\|\boldsymbol{x}_j^0 - \boldsymbol{x}_i^0\|}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\|}\right)(x_j - x_i) = F_x(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \tag{9}$$

$$F_{ij_y} = k_{ij}\left(1 - \frac{\|\boldsymbol{x}_j^0 - \boldsymbol{x}_i^0\|}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\|}\right)(y_j - y_i) = F_y(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \tag{10}$$

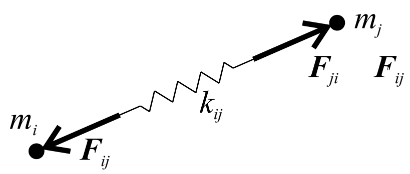

Figura 3: Fuerzas ejercidas por el resorte que une las partículas i y j sobre éstas.

3. Definición del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Introduciendo la definición (8) de las fuerzas $\boldsymbol{F}_{ij}$ en en las ecuaciones (1) a (5), llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden para las incógnitas $\boldsymbol{x}_i$:

$$\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_5) = m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 \tag{11}$$

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) = m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 \tag{12}$$

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) = m_3\ddot{\boldsymbol{x}}_3 \tag{13}$$

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) + \boldsymbol{W} = m_4\ddot{\boldsymbol{x}}_4 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{R}_5 - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_5) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) = m_5\ddot{\boldsymbol{x}}_5 \tag{15}$$

3.1. Reducción del orden del sistema

Si introducimos como incógnita la velocidad $\boldsymbol{v}_i = [u_i \ v_i]^T$ de la partícula i, podemos expresar su aceleración como

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}}_i \tag{16}$$

Nótese que remplazamos la aceleración, que ya no será tratada como derivada segunda de la incógnita $\boldsymbol{x}_i$ sino como derivada primera de la incógnita $\boldsymbol{v}_i$. Con ello, las ecuaciones diferenciales (11) a (15) resultan de primer orden en $\boldsymbol{x}_i$ y $\boldsymbol{v}_i$:

$$\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_5) = m_1\dot{\boldsymbol{v}}_1 \tag{17}$$

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) = m_2\dot{\boldsymbol{v}}_2 \tag{18}$$

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) = m_3\dot{\boldsymbol{v}}_3 \tag{19}$$

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) + \boldsymbol{W} = m_4\dot{\boldsymbol{v}}_4 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{R}_5 - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_5) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) = m_5\dot{\boldsymbol{v}}_5 \tag{21}$$

pero debemos aumentar el sistema introduciendo nuevas ecuaciones para las nuevas incógnitas $\boldsymbol{v}_i$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{x}}_1 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{x}}_2 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \dot{\boldsymbol{x}}_3 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{v}_4 = \dot{\boldsymbol{x}}_1 \tag{25}$$

$$\boldsymbol{v}_5 = \dot{\boldsymbol{x}}_5 \tag{26}$$

3.2. Condiciones iniciales

El sistema de ecuaciones (17) a (26) está sujeto a las siguientes condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{x}_i(t = 0) = \boldsymbol{x}_i^0 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{v}_i(t = 0) = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

3.3. Condiciones de borde

Consideremos ahora las fijaciones:

- La partícula de masa m_1 está fija, o sea $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^0$ ($\boldsymbol{x}_1^0$ es la posición inicial de la partícula 1, conocida) y $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$.
- La partícula de masa m_5 no puede desplazarse en dirección x, de modo que $x_5 = x_5^0$ (x_5^0 es la abscisa inicial de la partícula 5, conocida) y $u_5 = 0$.

Considerando las condiciones de borde, el sistema a resolver se reduce pues podemos eliminar las ecuaciones (17) y (22) y la componente en dirección x de las ecuaciones (21) y (26).

3.4. Forma final del problema

Hallar $x_2(t)$, $y_2(t)$, $x_3(t)$, $y_3(t)$, $x_4(t)$, $y_4(t)$, $y_5(t)$, $u_2(t)$, $v_2(t)$, $u_3(t)$, $v_3(t)$, $u_4(t)$, $v_4(t)$ y $v_5(t)$ tal que

$$u_2 = \dot{x}_2 \tag{29}$$
$$v_2 = \dot{y}_2 \tag{30}$$
$$u_3 = \dot{x}_3 \tag{31}$$
$$v_3 = \dot{y}_3 \tag{32}$$
$$u_4 = \dot{x}_4 \tag{33}$$
$$v_4 = \dot{y}_4 \tag{34}$$
$$v_5 = \dot{y}_5 \tag{35}$$
$$-F_x(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) = m_2\dot{u}_2 \tag{36}$$
$$-F_y(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) = m_2\dot{v}_2 \tag{37}$$
$$-F_x(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) - F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_x(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_x(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) = m_3\dot{u}_3 \tag{38}$$
$$-F_y(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) - F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) = m_3\dot{v}_3 \tag{39}$$
$$-F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) - F_x(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_x(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) + W_x = m_4\dot{u}_4 \tag{40}$$
$$-F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) - F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_y(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) + W_y = m_4\dot{v}_4 \tag{41}$$
$$-F_y(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_5) - F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) - F_y(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) = m_5\dot{v}_5 \tag{42}$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$x_2(0) = x_2^0 \tag{43}$$
$$y_2(0) = y_2^0 \tag{44}$$
$$x_3(0) = x_3^0 \tag{45}$$
$$y_3(0) = y_3^0 \tag{46}$$
$$x_4(0) = x_4^0 \tag{47}$$
$$y_4(0) = y_4^0 \tag{48}$$
$$y_5(0) = y_5^0 \tag{49}$$
$$u_2(0) = 0 \tag{50}$$
$$v_2(0) = 0 \tag{51}$$
$$u_3(0) = 0 \tag{52}$$
$$v_3(0) = 0 \tag{53}$$
$$u_4(0) = 0 \tag{54}$$
$$v_4(0) = 0 \tag{55}$$
$$v_5(0) = 0 \tag{56}$$

3.5. Solución usando MatLab®

El problema de la sección anterior puede resolverse usando la función ODE23S de MatLab®, para lo cual debemos llevarlo a la forma

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{Y}) \tag{57}$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{Y}^0 \tag{58}$$

Para ello, definimos el vector de incógnitas $\boldsymbol{Y}$ y la función vectorial $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{Y})$ como

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_4 & y_4 & y_5 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & v_5 \end{bmatrix}^T \tag{59}$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ v_5 \\ \frac{1}{m_2}\left[-F_x(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4)\right] \\ \frac{1}{m_2}\left[-F_y(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4)\right] \\ \frac{1}{m_3}\left[-F_x(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) - F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_x(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_x(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5)\right] \\ \frac{1}{m_3}\left[-F_y(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) - F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5)\right] \\ \frac{1}{m_4}\left[-F_x(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) - F_x(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_x(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) + W_x\right] \\ \frac{1}{m_4}\left[-F_y(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) - F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) + F_y(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5) + W_y\right] \\ \frac{1}{m_5}\left[-F_y(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_5) - F_y(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5) - F_y(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5)\right] \end{bmatrix} \tag{60}$$

4. Ejemplo

Consideremos el sistema de masas y resortes de la Figura 1. Las partículas 1, 2 y 4 se suponen de masa $m_1 = m_2 = m_4 = 0{,}5$, mientras las part´ i culas 3 y 5 tienen masa $m_3 = m_5 = 2$. Las posiciones iniciales de las partículas con las siguientes: $\boldsymbol{x}_1^0 = [1\ \ 1]^T$, $\boldsymbol{x}_2^0 = [10\ \ 0{,}5]^T$, $\boldsymbol{x}_3^0 = [6\ \ 4]^T$, $\boldsymbol{x}_4^0 = [9\ \ 6]^T$ y $\boldsymbol{x}_5^0 = [2\ \ 5]^T$. Todos los resortes se suponen de rigidez $k_{ij} = 20$. La carga tiene magnitud $W = 5$, dirección y negativa, y es aplicada en la partícula 4 a todo instante $t > 0$.

La solución del problema usando la función ODE23S de MatLab® para las posiciones y velocidades incógnitas se observa en las Figuras 4 y 5, respectivamente.

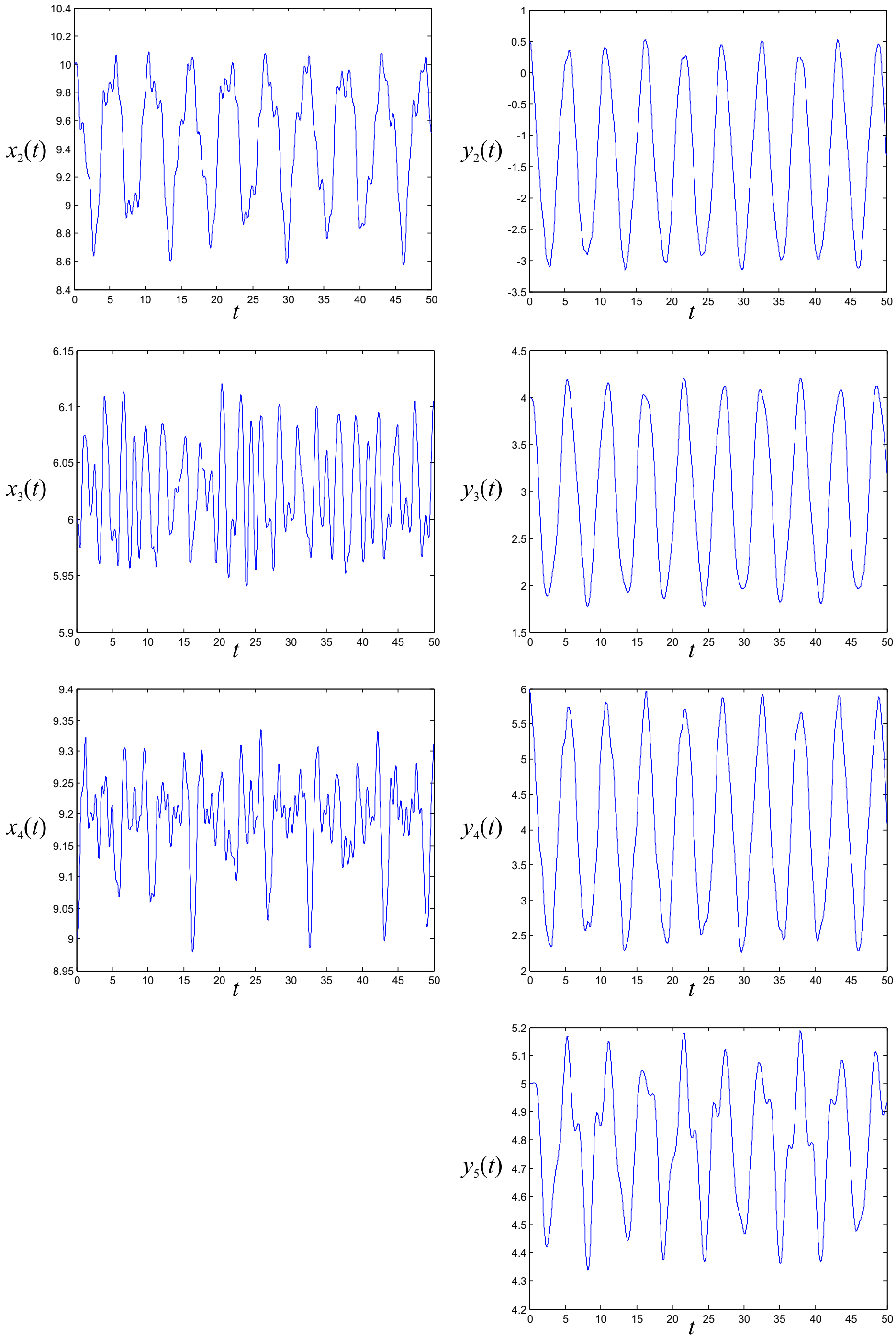

Figura 4: Evolución de la posición de las partículas para $0 < t < 50$.

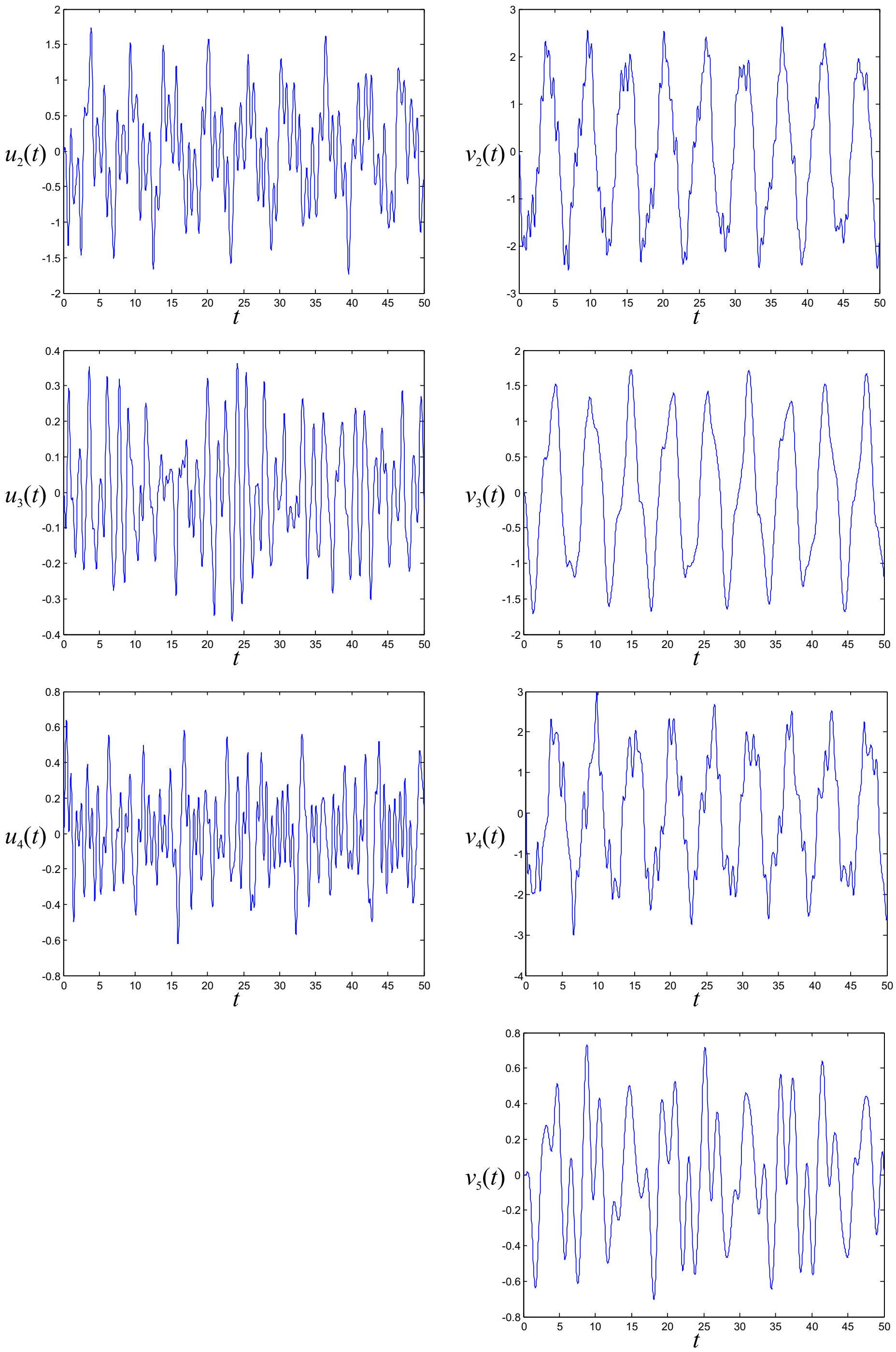

Figura 5: Evolución de la velocidad de las partículas para $0 < t < 50$.