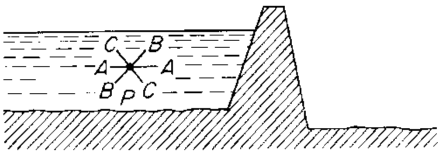
Universidad Nacional del Litoral

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Trabajo Práctico Número 3: Tensiones

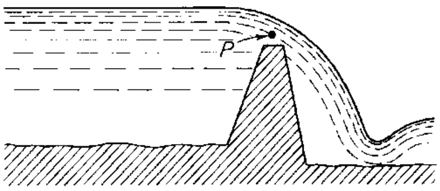
1. La figura muestra agua en un reservorio. En un punto *P*, consideremos las superficies *A-A, B-B,* etc. Dibuje los vectores de tensión que actúan sobre estas superficies. Considere todas las posibles superficies que pasen por *P*. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los vectores de tensión?



Rta: una esfera.

2. El agua de un reservorio desborda por un vertedero. Considere un punto próximo a la pared superior del vertedero, digamos a 10 cm sobre el mismo. Considere nuevamente todas las superficies que pasan por este punto y describa los vectores de tensión que actúan sobre estas superficies. ¿Es nuevamente el lugar geométrico de estos vectores una esfera?

   Considere ahora una sucesión de puntos que se acerca de la superficie de superior del vertedero, digamos a distancias 1 cm, 0,1 cm, 0,01 cm, 0,001 cm, etc. ¿Esperaría usted que el lugar geométrico de los vectores de tensión cambie cuando la distancia se hace muy pequeña? Preste atención a la viscosidad del agua.



3. Las componentes del tensor de tensiones en un cierto punto de un cuerpo, pueden ser presentadas como una matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   ¿Cuál es el vector de tensión que actúa en el lado externo (el lado opuesto al origen) del plano siguiente, que pasa por el punto en cuestión?

$$x + 3y + z = 1$$

   ¿Cuáles son las componentes normales y tangenciales del vector de tensión en este plano?

4. Un cuerpo sometido a la siguiente distribución de tensiones, ¿se encuentra en equilibrio en ausencia de cargas de cuerpo?

$$\sigma_x = 3x^2 + 4xy - 8y^2 \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{2}x^2 - 6xy - 2y^2$$
$$\sigma_y = 2x^2 + xy + 3y^2 \qquad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

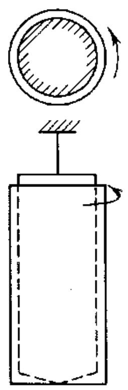
5. Si el estado de tensiones en un punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix}$$

hallar el vector de tensiones y la magnitud de la tensión normal y la tensión de corte actuando en el plano $x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 = 0$.

6. El conjunto de ocho planos con direcciones normales $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, en donde se elige uno de los signos + o – en cada caso, e.g. $(+1, +1, -1)$ corresponde al plano $x + y - z = 0$, es llamado conjunto de *planos octaédricos*. Sea un estado de tensión en un punto dado por τ_{ij}, con $\tau_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Determinar el vector de tensiones y la tensión de corte actuando en cada uno de los planos octaédricos.

7. *Flujo Couette*. El espacio entre dos cilindros concéntricos está lleno con un fluido. El cilindro interno está fijo, en tanto el cilindro externo rota con una velocidad angular $\omega \ {}^{\text{rad}}\!/_{\text{seg}}$. Si el torque medido en el cilindro interno es *T*, ¿cuánto vale el torque medido en el cilindro exterior? ¿Porqué?



8. Considere un estado bidimensional de tensiones en una placa delgada en la cual $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Las ecuaciones de equilibrio actuando en la placa con cargas distribuidas de cuerpo X, Y (constantes) son

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0.$$

Mostrar que estas ecuaciones se satisfacen idénticamente si $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ se derivan de una función arbitraria $\Phi(x, y)$ en la forma

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} - Xy - Yx$$

Luego, las ecuaciones de equilibrio pueden ser satisfechas por infinitas soluciones distintas. Veremos más adelante la forma de elegir de entre éstas soluciones, aquéllas que corresponden al problema particular en análisis.

Realice un programa en Matlab u Octave, en donde se grafiquen los campos de tensiones para las funciones $\Phi(x,y)$ siguientes en una región rectangular. Asuma cargas de cuerpo nulas. Elija valores arbitrarios. Interprete los resultados.

a. $\Phi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

   i. $a \neq 0, \quad b = c = 0$

   ii. $b \neq 0, \quad a = c = 0$

   iii. $c \neq 0, \quad a = b = 0$

b. $\Phi(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$

   i. $d \neq 0, \quad a = b = c = 0$

   ii. $a \neq 0, \quad b = c = d = 0$

   iii. $b \neq 0, \quad a = c = d = 0$