Una nota sobre el coeficiente de Poisson

En esta nota se va a demostrar que el coeficiente de Poisson no puede ser mayor a $\frac{1}{2}$. Para esto se supone que el material a analizar se encuentra sujeto a una presión hidrostática, con lo cual su volumen no puede aumentar. El tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ está dado por

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{1}$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, que en términos del módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν están dadas por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{2}$$

Luego, teniendo en cuenta que la presión hidrostática p se define como

$$-p = \frac{1}{3}\sigma_{rr}, \tag{3}$$

se encuentra haciendo uso de la Eq. (1) que

$$\begin{aligned} -p = \frac{1}{3}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3}\Big(\lambda \varepsilon_{kk}\delta_{rr} + 2\mu\varepsilon_{rr}\Big) && (4)\\ &= \frac{1}{3}\Big(3\lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{kk}\Big) && (5)\\ &= \frac{1}{3}\left(3\lambda + 2\mu\right)\varepsilon_{kk} && (6)\\ &= \frac{E}{3(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}. && (7) \end{aligned}$$

En donde en la última igualdad se hizo uso de las identidades presentadas en la Eq. (2). Como se demostró en la guía práctica de Análisis de Deformación, el cambio de volumen está dado por

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{rr}, \tag{8}$$

con lo cual

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3p(2\nu - 1)}{E}. \tag{9}$$

Teniendo en cuenta que $E > 0$ se pueden desprender las siguientes conclusiones analizando el resultado al cual se llegó:

- Si $\nu < \frac{1}{2}$, el cambio de volumen es negativo y satisface la física del problema indicando una contracción en el material.
- Si $\nu = \frac{1}{2}$, el cambio de volumen es nulo y el material es incompresible.
- Si $\nu > \frac{1}{2}$, el cambio de volumen es positivo, lo cual viola nuestro supuesto de que el volumen no puede aumentar cuando el material se encuentra sujeto a una presión hidrostática.

Estas observaciones nos llevan a concluir que el coeficiente de Poisson ν debe satisfacer la restricción $\nu \leq \frac{1}{2}$.