

EJEMPLO: Aplicación de Principio Variacional para la Ecuación del Calor

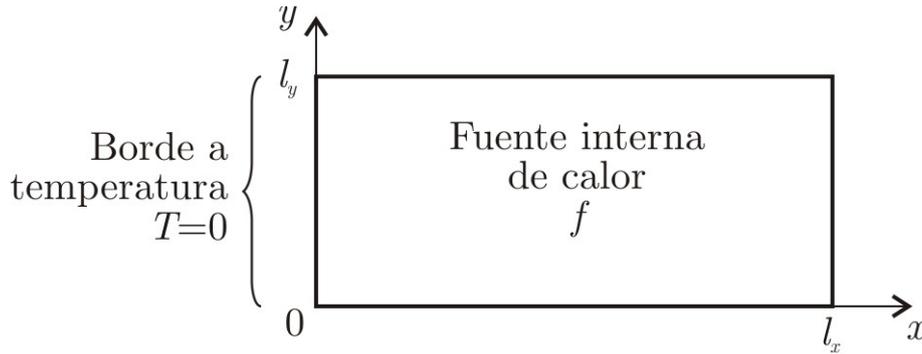


Figura 2: Conducción de calor en un dominio rectangular

2. CONDUCCIÓN DE CALOR EN UN DOMINIO RECTANGULAR

Sea un dominio rectangular $\mathcal{B} = [0, l_x] \times [0, l_y]$ como el de la Figura 2, donde la pared izquierda ($x = 0$) se mantiene a temperatura $T = 0$. En el dominio actúa una fuente interna de calor de magnitud f .

El problema de conducción de calor en este dominio, planteado en forma variacional por la ecuación (14) sin flujo de calor superficial ($\bar{q} = 0$), consiste en hallar la distribución de temperaturas $T = T(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}$ tal que

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \nabla T \cdot \nabla \delta T \, dx \, dy = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \delta T \, dx \, dy \quad (15)$$

para toda variación admisible δT de la temperatura.

2.1. Discretización del problema variacional

A continuación, describimos cómo discretizar el problema variacional (15), es decir, aproximarlo por un sistema de ecuaciones algebraicas con un número finito de incógnitas. Proponemos por ejemplo el siguiente espacio de soluciones

$$\mathcal{V} = \{u \text{ tal que } u = x P_n(x, y)\} \quad (16)$$

donde $P_n(x, y)$ es un polinomio completo de orden n . Nótese que las funciones $u \in \mathcal{V}$ tienen orden n en la variable y y orden $n + 1$ en la variable x , y pueden hacerse tan suaves como se quiera adoptando n suficientemente grande. **El problema se torna discreto al adoptar n finito.**

Además, al multiplicar P_n por x se garantiza que toda $u \in \mathcal{V}$ satisfaga automáticamente la condición de borde Dirichlet $u = 0$ en $x = 0$.

Recordemos que un polinomio P_n de orden n en dos variables x e y está dado por

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ji} x^j y^i \quad (17)$$

donde α_{ji} es un número real. Por ejemplo,

$$P_0(x, y) = \alpha_{00} = \text{constante} \quad (18)$$

$$P_1(x, y) = \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y = P_0 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y \quad (19)$$

$$P_2(x, y) = \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{01}y + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 = P_1 + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 \quad (20)$$

⋮

Gráficamente, los monomios del polinomio $P_n(x, y)$ quedan definidos por el triángulo de Pascal (Figura 3).

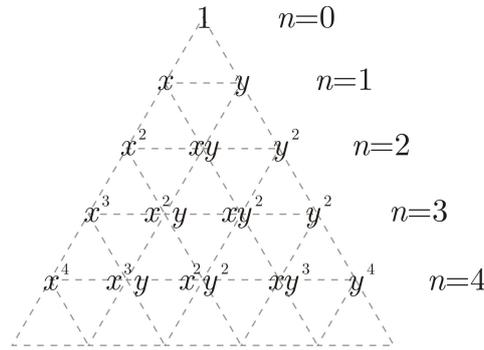


Figura 3: Triángulo de Pascal

Así, explícitamente, la solución $T \in \mathcal{V}$ resulta

$$T(x, y) = a_{00}x + a_{10}x^2 + a_{01}xy + a_{20}x^3 + a_{11}x^2y + a_{02}xy^2 + \dots \quad (21)$$

con los coeficientes reales a_{ij} como incógnitas a determinar. La ecuación anterior puede escribirse en forma matricial como

$$T(x, y) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \quad (22)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ xy \\ x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (23)$$

El gradiente de T resulta:

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} + 2xa_{10} + ya_{01} + 3x^2a_{20} + 2xya_{11} + y^2a_{02} + \dots \\ 0 + 0 + xa_{01} + 0 + x^2a_{11} + 2xya_{02} + \dots \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{A} \quad (24)$$

con

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y & 3x^2 & 2xy & y^2 & \dots \\ 0 & 0 & x & 0 & x^2 & 2xy & \dots \end{bmatrix} \quad (25)$$

En forma matricial, la variación $\delta T \in \mathcal{W}$ puede escribirse como

$$\delta T = \delta \mathbf{A}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \delta \mathbf{A} \quad (28)$$

con $\delta \mathbf{A}$ arbitrario. El gradiente de δT resulta entonces

$$\nabla(\delta T) = \mathbf{B} \delta \mathbf{A} \quad (29)$$

Ahora, reemplazando las formas matriciales de T , δT y sus gradientes en la forma variacional de la ecuación del calor dada por la ecuación (15), obtenemos

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k(\mathbf{B} \delta \mathbf{A})^T (\mathbf{B} \mathbf{A}) \, dx \, dy = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \delta \mathbf{A}^T \mathbf{X} \, dx \, dy \quad (30)$$

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \delta \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{A} \, dx \, dy = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \delta \mathbf{A}^T \mathbf{X} \, dx \, dy \quad (31)$$

$$\delta \mathbf{A}^T \left(\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, dx \, dy \right) \mathbf{A} = \delta \mathbf{A}^T \left(\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \mathbf{X} \, dx \, dy \right) \quad (32)$$

$$(33)$$

Considerando que el vector $\delta \mathbf{A}$ es arbitrario, llegamos al siguiente sistema lineal de ecuaciones algebraicas con \mathbf{A} como incógnita

$$\mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (34)$$

con

$$\mathbf{K} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, dx \, dy \quad (35)$$

$$\mathbf{F} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \mathbf{X} \, dx \, dy \quad (36)$$

Nótese que la matriz \mathbf{K} es simétrica, o sea, $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$.

2.2. Ejemplo 1: Conducción de calor en un dominio rectangular con fuente de calor uniforme

Aproximemos la solución T suponiendo $n = 1$, esto es, T es una función cuadrática de la variable x y lineal de la variable y . Con $n = 1$, la aproximación de T sólo contiene los términos con coeficientes a_{ij} donde $i + j \leq 1$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ xy \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y \\ 2x & 4x^2 & 2xy \\ y & 2xy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Asumiendo f y k constantes, tenemos

$$\mathbf{F} = f \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \mathbf{X} \, dx \, dy = f \begin{bmatrix} l_x^2 l_y / 2 \\ l_x^3 l_y / 3 \\ l_x^2 l_y^2 / 4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{K} = k \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, dx \, dy = k \begin{bmatrix} l_x l_y & l_x^2 l_y & l_x l_y^2 / 2 \\ l_x^2 l_y & 4 l_x^3 l_y / 3 & l_x^2 l_y^2 / 2 \\ l_x l_y^2 / 2 & l_x^2 l_y^2 / 2 & (l_x^3 l_y + l_x l_y^3) / 3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Para $l_x = 2 \text{ m}$, $l_y = 1 \text{ m}$, $f = 0,8 \text{ W/m}^2$, $k = 10 \text{ W/(mK)}$, resulta

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,60 \\ 2,13 \\ 0,80 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 \\ 40 & 106,67 & 20 \\ 10 & 20 & 33,33 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,1667 \\ -0,04 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Finalmente, la distribución de temperaturas en el dominio puede aproximarse como

$$T = 0,1667x - 0,04x^2 = T(x) \quad (41)$$

Esta solución es graficada en la Figura 4.

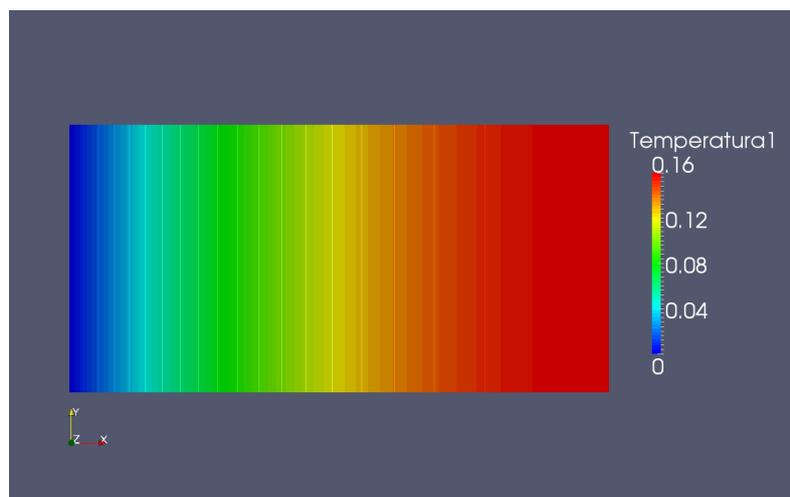


Figura 4: Ejemplo 1: Distribución de temperaturas

2.3. Ejemplo 2: Conducción de calor en un dominio rectangular con fuente de calor variable

Supongamos el mismo problema del ejemplo 1, a excepción de considerar que la fuente de calor varía a través del dominio según la expresión

$$f(x, y) = \text{sen} \frac{\pi x}{l_x} \text{sen} \frac{\pi y}{l_y} \quad (42)$$

Esta fuente de calor es ilustrada en la Figura 5.

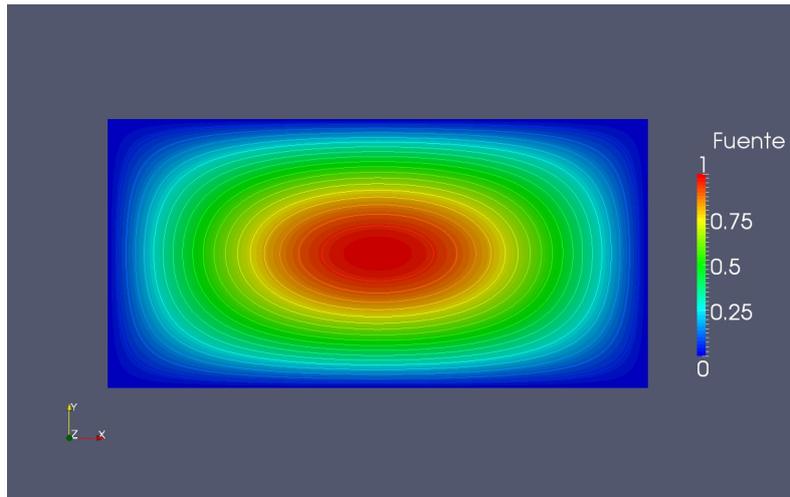


Figura 5: Ejemplo 2: Fuente variable $f = f(x, y)$

La matriz \mathbf{K} es idéntica que en el ejemplo anterior

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 \\ 40 & 106,67 & 20 \\ 10 & 20 & 33,33 \end{bmatrix} \quad (43)$$

y sólo debemos recalcular

$$\mathbf{F} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \text{sen} \frac{\pi x}{l_x} \text{sen} \frac{\pi y}{l_y} \mathbf{X} \, dx \, dy = \begin{bmatrix} 2l_x^2 l_y / \pi^2 \\ 2(\pi^2 - 4)l_x^3 l_y / \pi^4 \\ l_x^2 l_y^2 / \pi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8106 \\ 0,9641 \\ 0,4053 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Luego,

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,08901 \\ -0,02464 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Finalmente, la distribución de temperaturas en el dominio puede aproximarse como

$$T = 0,08901x - 0,02464x^2 = T(x) \quad (46)$$

Esta solución es graficada en la Figura 6.

Esta aproximación es pobre por cuanto no alcanza a captar la variación de T en la dirección y . Para mejorarla, debemos aumentar el número de términos en el polinomio aproximante.

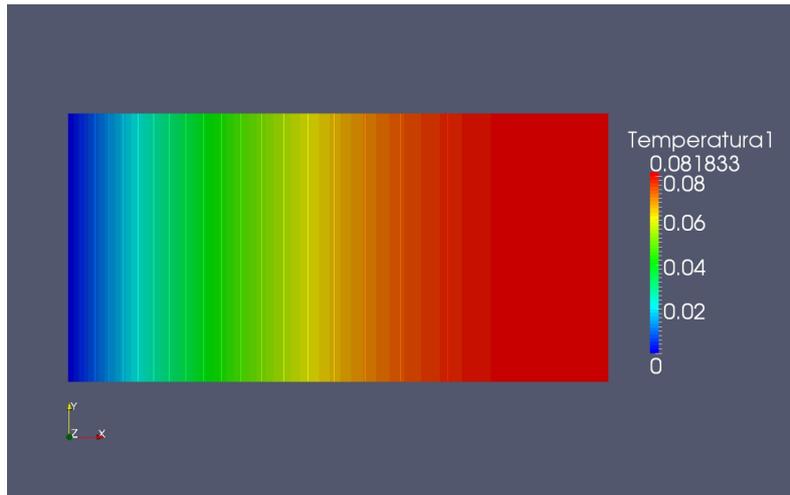


Figura 6: Ejemplo 2: distribución de temperatura para $n = 1$

Si tomamos $n = 2$, tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ xy \\ x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y & 3x^2 & 2xy & y^2 \\ 0 & 0 & x & 0 & x^2 & 2xy \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y & 3x^2 & 2xy & y^2 \\ 2x & 4x^2 & 2xy & 6x^3 & 4x^2y & 2xy^2 \\ y & 2xy & x^2 + y^2 & 3x^2y & 2xy^2 + x^3 & y^3 + 2x^2y \\ 3x^2 & 6x^3 & 3x^2y & 9x^4 & 6x^3y & 3x^2y^2 \\ 2xy & 4x^2y & 2xy^2 + x^3 & 6x^3y & 4x^2y^2 + x^4 & 2xy^3 + 2x^3y \\ y^2 & 2xy^2 & y^3 + 2x^2y & 3x^2y^2 & 2xy^3 + 2x^3y & y^4 + 4x^2y^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Luego:

$$\mathbf{F} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_x} \text{sen} \frac{\pi x}{l_x} \text{sen} \frac{\pi y}{l_y} \mathbf{X} \, dx \, dy = \begin{bmatrix} 0,8106 \\ 0,9641 \\ 0,4053 \\ 1,2712 \\ 0,4821 \\ 0,2410 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{K} = k \int_0^{l_x} \int_0^{l_x} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, dx \, dy = k \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 & 80 & 20 & 20/3 \\ 40 & 320/3 & 20 & 240 & 160/3 & 40/3 \\ 10 & 20 & 100/3 & 40 & 160/3 & 95/3 \\ 80 & 240 & 40 & 576 & 120 & 80/3 \\ 20 & 160/3 & 160/3 & 120 & 896/9 & 50 \\ 20/3 & 40/3 & 95/3 & 80/3 & 50 & 356/9 \end{bmatrix} \quad (50)$$

de donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,08927 \\ -0,02464 \\ 0,00324 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00324 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Finalmente, para $n = 2$, la distribución de temperaturas en el dominio puede aproximarse como

$$T = 0,08927x - 0,02464x^2 + 0,0324xy - 0,0324xy^2 = T(x, y) \quad (52)$$

Esta solución es graficada en la Figura 7.

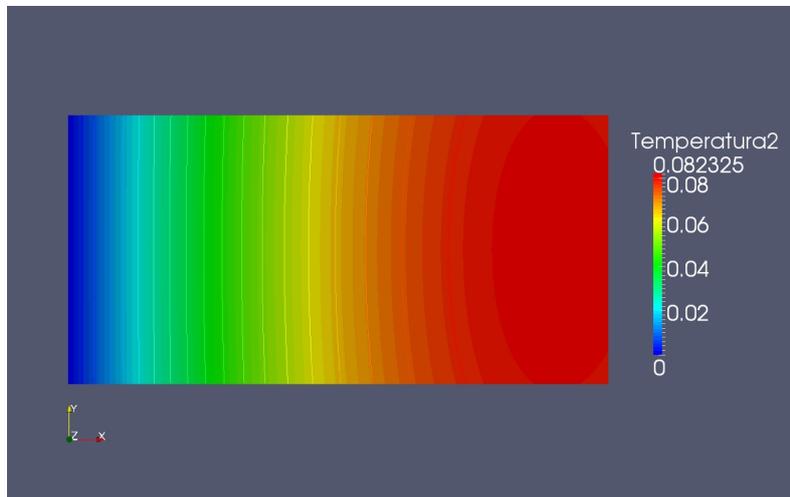


Figura 7: Ejemplo 2: distribución de temperatura para $n = 2$

La Figura 8 permite comparar las aproximaciones para $n = 1$ y $n = 2$.

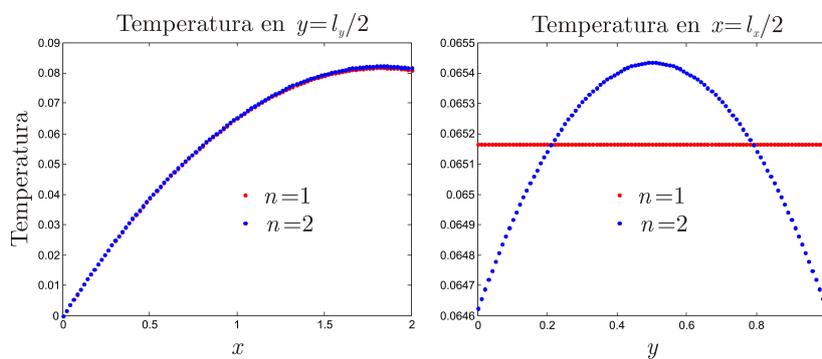


Figura 8: Ejemplo 2: temperatura a lo largo de las líneas $y = l_y/2$ y $x = l_x/2$ para $n = 1$ y $n = 2$