BALANCE DE ENERGÍA

Víctor Fachinotti

Cátedra de Mecánica del Continuo, Carrera de Ingeniería Informática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral (UNL), vfachino@intec.unl.edu.ar, http://www.cimec.org.ar/twiki/bin/view/MC/WebHome

1. ECUACIÓN DEL CALOR

El movimiento de un continuo está gobernado por por la ley de conservación o balance de energía, que es la Primera Ley de la Termodinámica.

Cuando los fenómenos mecánicos son los preponderantes (tornando los demás fenómenos despreciables), el balance de energía térmica se reduce a la ecuación de momento lineal.

Supongamos aquí que los fenómenos térmicos son los preponderantes y despreciemos los demás fenómenos, así el balance de energía puede plantearse como una ecuación independiente.

La energía interna del cuerpo $\mathcal{B}$ es definida como

$$E = \int_{\mathcal{B}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V \tag{1}$$

donde ρ es la densidad del material y ε la energía interna por unidad de volumen.

La primera ley de la termodinamica establece que el cambio de energía interna de un sistema es igual al calor Q absorbido más el trabajo realizado sobre el sistema (fenómeno mecánico que hemos despreciado), o sea:

$$\varDelta E = Q \tag{2}$$

El cambio por unidad de tiempo es:

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} \tag{3}$$

El calor absorbido por el cuerpo $\mathcal{B}$ pasa a través de la frontera. Se define el vector flujo de calor $\boldsymbol{q}$, tal que la tasa con la que el calor se transmite desde interior de $\mathcal{B}$ hacia el exterior a través del elemento de superficie $\mathrm{d}\mathcal{S}$ de normal exterior $\boldsymbol{n}$ es $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = q_i n_i \,\mathrm{d}S$, que es la tasa con la que $\mathcal{B}$ pierde calor a través de calor a través de $\mathrm{d}\mathcal{B}$. La tasa con la que $\mathcal{B}$ gana calor es entonces

$$\dot{Q} = -\int_{\mathcal{S}} q_i n_i \,\mathrm{d}S \tag{4}$$

Por el teorema de Gauss

$$\dot{Q} = -\int_{\mathcal{B}} q_{i,i} \,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{q} \,\mathrm{d}V \tag{5}$$

Luego, la ecuación (3) resulta

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{q} \,\mathrm{d}V \tag{6}$$

Aplicando la definición de derivada material de un volumen integral suponiendo que el cuerpo está en reposo, el lado izquierdo toma la forma

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\varepsilon + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\mathrm{d}V \tag{7}$$

Con el cuerpo en reposo, la ecuación de continuidad resulta

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Luego, la tasa de cambio de la energía interna total resulta

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}V \tag{9}$$

Así, la ecuación (6) toma la forma

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{q} \,\mathrm{d}V \tag{10}$$

Considerando que $\mathcal{B}$ es arbitrario, llegamos a la ecuación de balance de energía cuando los fenómenos térmicos son preponderantes:

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0 \tag{11}$$

La ley de Fourier es una ley constitutiva lineal para el flujo de calor, que postula una relación lineal entre el flujo de calor y el gradiente de temperatura T, de la forma

$$\boldsymbol{q} = -k \operatorname{grad} T \quad \text{o} \quad q_i = -kT_{,i} \tag{12}$$

donde k es la conductividad térmica del material.

Para un material que obedezca la ley de Fourier, la ecuación de balance de energía (11) resulta

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = 0 \tag{13}$$

Para un sólido en reposo, despreciando fenómenos mecánicos, la energía interna por unidad de volumen está dada por

$$\rho\varepsilon = \rho c T \tag{14}$$

donde c es la capacidad calorífica del material por unidad de masa o calor específico del material.

Finalmente, la ecuación de balance toma la forma conocida como **ecuación de calor**

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = 0 \tag{15}$$

2. FORMA VARIACIONAL DE LA ECUACIÓN DEL CALOR

En régimen estacionario, la ecuación del calor se reduce a

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = 0 \qquad \text{sobre } \mathcal{B} \tag{16}$$

Si además del calor absorbido por la frontera, hay una fuente interna de calor f, la ecuación del calor toma la forma

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f = 0 \qquad \text{sobre } \mathcal{B} \tag{17}$$

La ecuación del calor está sujeta a las condiciones de borde

$$T = \bar{T} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_T \tag{18}$$

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = -k \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n} = \bar{q} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_q \tag{19}$$

Sea

$$\tilde{T} = T + \delta T \tag{20}$$

otro campo de temperaturas que, si bien arbitrario, satisface la condición de borde en la porción $\mathcal{S}_T$ de la frontera $\mathcal{S}$, o sea

$$\tilde{T} = \bar{T} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_T \tag{21}$$

Luego, δT debe satisfacer:

$$\delta T = 0 \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_T \tag{22}$$

pero es arbitraria en $\mathcal{S}_q$.

Pediremos además que δT sea suficientemente suave (esto, continua y de derivadas parciales continuas hasta un orden suficientemente grande). Un campo arbitrario δT que cumpla todas estas condiciones se denomina **variación de temperatura**.

Multipliquemos la equación de calor (17) por δT y luego integremos sobre $\mathcal{B}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)\delta T \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} f \delta T \, \mathrm{d}V \tag{23}$$

El lado izquierdo se puede descomponer en dos términos:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)\delta T \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T \delta T) \, \mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}} k \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} \delta T \, \mathrm{d}V \tag{24}$$

Apliquemos el **teorema de Gauss** al primer término del lado derecho:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T \delta T) \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}} (k \operatorname{grad} T \delta T) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} k \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n} \delta T \, \mathrm{d}S \tag{25}$$

Como $\delta T = 0$ sobre $\mathcal{S}_T$:

$$\int_{\mathcal{S}} k \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n} \delta T \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_q} k \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n} \delta T \, \mathrm{d}S \tag{26}$$

Sobre $\mathcal{S}_q$, tenemos la condición de borde $-k\,\mathrm{grad}\,T \cdot \boldsymbol{n} = \bar{q}$, así que el primer término del lado derecho de la ecuación (28) resulta finalmente

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\,T\delta T)\,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{S}_q} q\delta T\,\mathrm{d}S \tag{27}$$

Introduciendo ésta en la ecuación (28), tenemos

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\,T)\delta T\,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{S}_q} q\delta T\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}} k\,\mathrm{grad}\,T \cdot\,\mathrm{grad}\,\delta T\,\mathrm{d}V \tag{28}$$

Con esta ecuación en la ecuación (23), llegamos a la **forma variacional o débil de la ecuación del calor**

$$-\int_{\mathcal{B}} k\,\mathrm{grad}\,T \cdot\,\mathrm{grad}\,\delta T\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} f\delta T\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{S}_q} q\delta T\,\mathrm{d}S \tag{29}$$