

Examen final [Jueves 2 de Agosto de 2012]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

- 1) a) (i) En una implicación indique cuál es la condición necesaria, cuál es la suficiente y dé un ejemplo; (ii) Determine si $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ es una tautología (o no).
b) (i) Calcule $\text{mcd}(414, 662)$ usando el algoritmo de Euclides; (ii) Escriba un pseudocódigo **euclides** (**a,b**) en el que, dados los enteros positivos a, b , devuelva el $\text{mcd}(a, b)$.
c) Considere la relación $R = \{(a, b) \mid a = b \vee a = -b\}$ en el conjunto $X = \{-1, 0, 1\}$: (i) Enumere sus pares ordenados; (ii) Trace el digrafo asociado; (iii) Justifique si es una relación de equivalencia o de orden.
- 2) a) Traduzca al lenguaje natural la cuantif. $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 2)$ y determine su valor de verdad.
b) Considere los conjuntos A, B y C tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$: (i) Trace un diagrama de Venn que lo represente; (ii) Demuestre que $A \subseteq C$.
c) Demuestre usando inducción que $f_n \leq 2^{n-1}$ para todo entero $n \geq 1$, donde f_n es el n -ésimo número de Fibonacci.
- 3) a) (i) Defina r -combinación; (ii) Escriba y demuestre una fórmula para contar el número de r -combinaciones de un conjunto de n elementos distintos, y dé un ejemplo de su uso.
b) De un alfabeto de 26 letras minúsculas, justifique el número de cadenas de 7 caracteres tales que: (i) No-contengan vocales si las letras no-se pueden repetir; (ii) Comienzan y terminan con x y contengan al menos una vocal si las letras se pueden repetir.
c) Considere la Relación de Recurrencia (RR): $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ para $n \geq 2$: (i) Clasifique exhaustivamente; (ii) Encuentre la solución cuando $a_0 = 5$ y $a_1 = 7$.
- 4) *Nota: Tiene que mostrar todos los pasos intermedios. Si bien puede hacer una tabla es preferible que dibuje cada grafo intermedio que resulte del uso de cada algoritmo.*
a) (i) En el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.) trace un ciclo de Euler y uno de Hamilton que no-coincidan o justifique que no es posible; (ii) Defina vértice de articulación y arista puente en un grafo conexo G y dé un ejemplo;
b) En el grafo G_2 de la Fig. 1 (centr.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_2 usando búsqueda en profundidad en el orden alfabético; (ii) Dibuje T_2 aparte indicando: raíz, hojas, nivel de cada vértice, altura, antecesores, descendientes y hermanos del vértice I .
c) En el grafo G_3 de la Fig. 1 (der.): (i) Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar una trayectoria de longitud mínima entre los vértices A y D , trácela e indique su longitud; (ii) Use el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol de expansión mínimo T_3 , mostrando cada paso intermedio e indicando el peso mínimo hallado, y finalmente recórralo en preorden. ¿Por qué, en general, no hay unicidad?

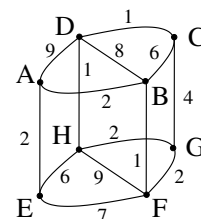
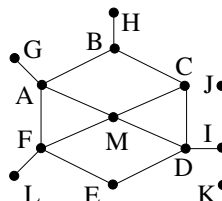
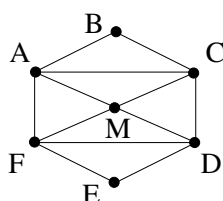


Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (centro) y G_3 (der.) para los incisos 4a-4c.