Métodos Numéricos y Simulación. Guía de Trabajos Prácticos Nro. 2

Ej. 1.- Construya un subespacio de dimensión finita V_h de V consistente en funciones cuadráticas en cada subintervalo I_j de una partición de $I = (0, 1)$. Cómo pueden elegirse los parámetros que describan estas funciones? Halle las funciones de base correspondientes. Luego formule un método de elementos finitos para el problema:

$$\begin{aligned} -u^{''}(x) =& f(x) \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) =& u(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

usando el subespacio Vh y escriba el sistema de ecuaciones lineales que resulta cuando se escoge una partición uniforme.

Ej. 2.- Considere el problema de conducción del calor 1D:

$$k\Delta T + Q - c(T - T_{\mathrm{amb}}) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2}$$

donde k es la conductividad del medio, T la temperatura, Q una fuente de calor interna, c una constante de pérdida de calor al medio ambiente y T_{amb} la temperatura del medio ambiente. Las condiciones de contorno en los extremos puede ser

$$\begin{aligned} T = \bar{T}, & \quad \text{Dirichlet} \\ !q \cdot \hat{\mathbf{n}} = -k\frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}, & \quad \text{Neumann - flujo impuesto} \\ !q \cdot \hat{\mathbf{n}} = -k\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T\infty), & \quad \text{Robin - convección} \end{aligned} \tag{3}$$

Considerar el caso $c = 0$, $k = 1$, $Q = 1$ para $x \leq 1/2$, 0 si $x > 1/2$, condición Dirichlet en $\bar{T} = 1$ en $x = 0$ y $\bar{T} = 0$ en $x = L$.

Escriba un programa para resolver el problema anterior por el método de los elementos finitos, usando una malla uniforme de paso $h = 1/N$, donde N es el número de segmentos. Mostrar como el error con respecto a la solución analítica se reduce al aumentar el número de intervalos N.

Luego resolver el mismo problema con condición de contorno Neumann homogénea ($\bar{q} = 0$) en $x = L$.

Ej. 3.- Armar la matriz elemental del operador Laplaciano en un elemento triangular lineal genrico.

Ej. 4.- Armar la matriz elemental del operador Laplaciano en un elemento cuadrangular bilineal genrico.

Ej. 5.- Considere el problema de conducción del calor 2D: $k\Delta T + Q = 0$, en un dominio Ω Escriba un programa de elementos finitos lineales triangulares que resuelva este problema con condiciones de contorno Dirchlet, Neumann o mixtas. Resuelva el problema de conducción del calor en un cuadrado con un término de generación de calor en volumen $Q = 1$ y condiciones de contorno Dirichlet $T = 0$. Calcular la temperatura máxima. Repetir para condición de contorno mixta con diferentes coeficientes peliculares. ¿Como se comporta la temperatura máxima a medida de que el coeficiente pelicular disminuye? ¿Cual sería la temperatura máxima para coeficiente pelicular tendiendo a cero? A que condición de contorno correspondería?

Ej. 6.- Escriba un programa de elementos finitos lineales triangulares que resuelva el problema de conducción de calor transiente con condiciones de contorno Dirchlet, por el método de elementos finitos. Resuelva el problema de conducción del calor en un dominio cuadrado de lado unitario con conductividad y calor específico unitarios cuando la temperatura inicial es nula y a $t = 0$ se aplica una temperatura $T = 100^{\circ}$C. ¿Cuánto tarda en llegar la temperatura en el centro a 50°C?

Ej. 7.- Escriba un un programa de elementos finitos bilineales cuadrangulares que resuelva el problema de elasticidad estacionario por el método de elementos finitos. Considere el caso de una viga de relación de aspecto 1:10, empotrada en un extremo y con una carga en el otro extremo. Calcule la carga necesaria para que el extremo de la viga se deflecte una distancia igual al ancho de la viga.

Ej. 8.- Escriba un un programa de elementos finitos bilineales cuadrangulares que resuelva el problema de elasticidad transitoria por el método de elementos finitos. Calcule la frecuencia natural de vibración más baja de una viga de relación de aspecto 1:10 con un extremo empotrado y el otro libre.