Universidad Nacional del Litoral

Mecánica Computacional

Docentes:

Dr. Norberto Marcelo Nigro[1]

MSc. Gerardo Franck[2]

Ing. Diego Sklar[3]

GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS Nº 1

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

(Agosto 2011)

[1]nnigro@intec.unl.edu.ar
[2]gerardofranck@yahoo.com.ar
[3]diegosklar@gmail.com

Ejercicio 1

Considere el problema de conducción de calor 1D:

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{t}} + \mathbf{k}\Delta\mathbf{T} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{amb}}) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{L} \tag{1}$$

donde k es la conductividad del medio, T la temperatura, Q una fuente de calor interna, c una constante de pérdida de calor al medio ambiente y T_{amb} la temperatura del medio ambiente. Las condiciones de contorno en los extremos pueden ser:

$$\boldsymbol{T} = \overline{\boldsymbol{T}}, \quad \boldsymbol{Dirichlet}$$

$$\boldsymbol{q}.\widehat{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{n}} = \overline{\boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{Neumann - Flujo\ impuesto} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{q}.\widehat{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_{\infty}), \qquad \boldsymbol{Robin - Convecci}\text{ó}\boldsymbol{n}$$

Considerar el caso estacionario, con c = 0, k = 1, Q = 1 en x = ¼ y Q = 0 en el resto del dominio, condición Dirichlet $\overline{T}$ = 1 en x = 0 y $\overline{T}$ = 0 en x = L. Escribir un programa para resolver el problema anterior por el método de diferencias finitas usando una malla uniforme de paso h = 1/N, donde N es el número de segmentos. Mostrar como se reduce el error con respecto a la solución analítica al aumentar el número de intervalos N.

Ejercicio 2

La ecuación que gobierna el perfil de temperatura en un fluido viscoso que circula entre dos placas paralelas (y = 0 e y = 2H) es:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4U^2\mu}{H^4k}(H-y)^2 \tag{3}$$

Donde, μ, k y U son la viscosidad, conductividad térmica y velocidad máxima del fluido, respectivamente. Si μ = 0.1, k = 0.08, H = 30 y U = 3.0; calcule la distribución de temperatura cuando una de las placas es mantenida a $\overline{T}$ = 0 y la otra a $\overline{T}$ = 5, usando el método de diferencias finitas, con un espaciamiento de la malla de Δy = 0.5*H.

Ejercicio 3

El problema de conducción del calor en un recinto rectangular (2D) en coordenadas cartesianas de dimensiones Lx = 3 y Ly = 1, es gobernado por la siguiente ecuación:

$$k\left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2}\right) = Q \tag{4}$$

Como condición de borde se considera una temperatura impuesta a un valor nulo en todos los contornos. Asumir que la conductividad térmica es unitaria y la fuente de calor queda expresada como $Q(x, y) = 2(x^2 + y^2)$. Utilizar un esquema en diferencias de segundo orden, con un espaciamiento homogéneo en cada eje usando un Δx = 0.5 y Δy = 0.25.

a) Obtener la solución y graficarla.
b) Analizar cómo cambia la solución si en lugar de fijar la temperatura del contorno al valor nulo la fijamos a otro valor, por ejemplo, $\bar{T}$ = 100.
c) Resuelva el mismo problema anterior pero ahora utilice las siguientes condiciones de contorno:
    - Temperatura impuesta ($\bar{T}$ = 100) en los contornos superior, izquierdo y derecho
    - Flujo de calor nulo (adiabático) en el contorno inferior.

Ejercicio 4

Suponga la ecuación de difusión-migración para una especie ϕ cargada eléctricamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla.(\Psi \boldsymbol{E} \phi) = \nabla.(\nu \nabla \phi), \qquad \forall x \in \Omega$$

donde Ψ es la movilidad de la especie, que relaciona la velocidad de migración con la intensidad del campo eléctrico **E**, y ν es la difusividad de la especie. Encuentre, mediante el método de diferencias finitas, una solución al campo de concentraciones $\phi(x, y, t)$ en un dominio rectangular de 10x1 cm^2 para las siguientes condiciones de frontera:

$$\phi(x, y, 0) = e^{-\left(\frac{x-0.5}{0.05}\right)^2} e^{-\left(\frac{y-0.5}{0.05}\right)^2}$$

$$\Phi(0,0,t) = 0\ V \tag{6}$$

$$\Phi(10,1,t) = 10\ V$$

donde Φ es el potencial eléctrico aplicado, y para las fronteras que no se mencionan, las condiciones de borde correspondientes son del tipo natural. Se sabe que la ecuación que gobierna el potencial eléctrico es $\boldsymbol{\nabla^2 \Phi = 0}$ y que $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla \Phi}$. Suponga $\Psi = 5.10^{-7} \frac{m^2}{V_s}$, $\nu = 10^{-8} \frac{m^2}{s}$, y la conductividad y la permisividad eléctrica del medio constante.

a) Justifique la elección de los parámetros de discretización temporal y espacial.
b) Grafique la solución para tres instantes de tiempo diferentes.

Ejercicio 5

Resolver el siguiente problema no lineal, utilizando un esquema en diferencias de segundo orden:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} - 0.1\emptyset^2 = 0, \qquad 0 < x < 1 \\ \emptyset(x = 0) = 10 \\ \emptyset(x = 1) = 80\end{gathered} \tag{7}$$

Utilizar un espaciamiento de malla Δx = 0.25 y Δx = 0.125. Para resolver la no linealidad del problema utilizar el método de Picard y el método de Newton-Raphson. Comparar los resultados obtenidos con cada método.