2 LEYES DE CONSERVACION

Leyes de mov $\Rightarrow$ 2s cantidades $q_i, \dot{q}_i$ que varían en el tiempo dep de las C.I.

$\exists$ relaciones entre ellas q/se mantienen constantes "integrales del movimiento"

P/un sistema de s GDL $\Rightarrow$ 2s-1 integ del movimiento.

D) La solución gral de un sist contiene 2s ctes arbitrarias.

P/un sistema cerrado, las ecs de movimiento no incluyen explícit el tiempo.

Luego el origen de tiempo es arbitrario y una de las ctes arbitrarias puede ser interpretada como una cte aditiva t_0 en el tiempo.

Eliminado $(t+t_0)$ de las 2s funciones

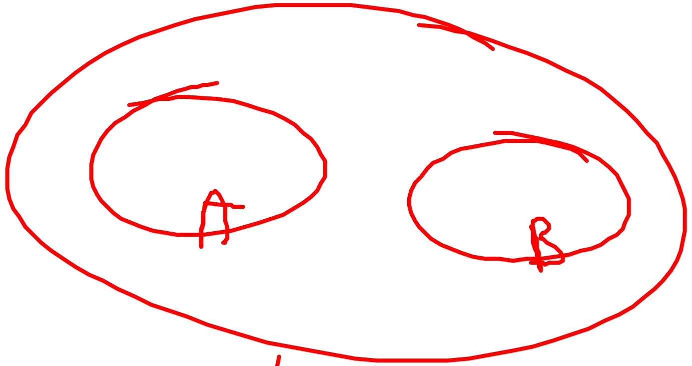
$$q_i = q_i(\cancel{t+t_0}, C_1, C_2, \dots C_{2s-1})$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\cancel{t+t_0}, C_1, C_2, \dots C_{2s-1})$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{2s-1} \end{pmatrix} = f_i(q_1, q_2, \dots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_s)$$

<u>VOLVER</u>

No todas las int de movimiento tiene igual importancia.
Algunas tiene + signif y derivan de la homogeneidad e isotropía del tiempo y el espacio.
Las cantidades representadas x estas "integrales" decimos "se conserva" y tienen la propiedad de ser aditivas.



$$PROP = PROP_A + PROP_B$$

(no hay interacción entre A y B)

Esta prop permite Analizar casos c/interacción mecánica: vemos luego la prop antes de la interacción y luego de la interacción y analizamos si se conserva.

1) leyes de conservación relacionadas c/ homogeneidad del tiempo

El Lagrangiano de un sistema cerrado NO depende del tiempo.

Luego, la derivada total:

$$\frac{dL}{dt} = \sum \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\text{(x Lagrange) } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\ddot{q}_i}_{\frac{d}{dt}\dot{q}_i} \cancel{+ \frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

O sea $\quad \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L}_{E}\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(E) = 0$

O sea, en un sist cerrado,

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

E "energía del sistema"

se mantiene constante

Como E es función lineal del Lagrangiano ⇒ E es aditiva.
(Lagrangiano es aditivo)

Si tenemos un sistema abierto, que se mueve en un campo constante (independiente del tiempo) ⇒ E es constante.

Sistema mecánico q/conserva energía ⇒ Sistema conservativo

El Lagrangiano de un sistema cerrado:

$$L = \underbrace{T(q,\dot q)}_{f \text{ cuadrática de } \dot q} - U(q)$$

$$\left[\sum \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \sum_i \dot q_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = 2T\right] \Rightarrow \text{en } E$$

$$T = \frac{1}{2}\sum\sum a_{ij}(q)\,\dot q_i \dot q_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} = \frac{1}{2} a_{ij}\,\delta_{ik}\,\dot q_j + \frac{1}{2} a_{ij}\,\dot q_i\,\delta_{jk} = \frac{1}{2} a_{kj}\,\dot q_j + \frac{1}{2} a_{ik}\,\dot q_i =$$

$$= a_{kj}\,\dot q_j$$

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - \underbrace{L}_{T-U} = T + U$$

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q)$$

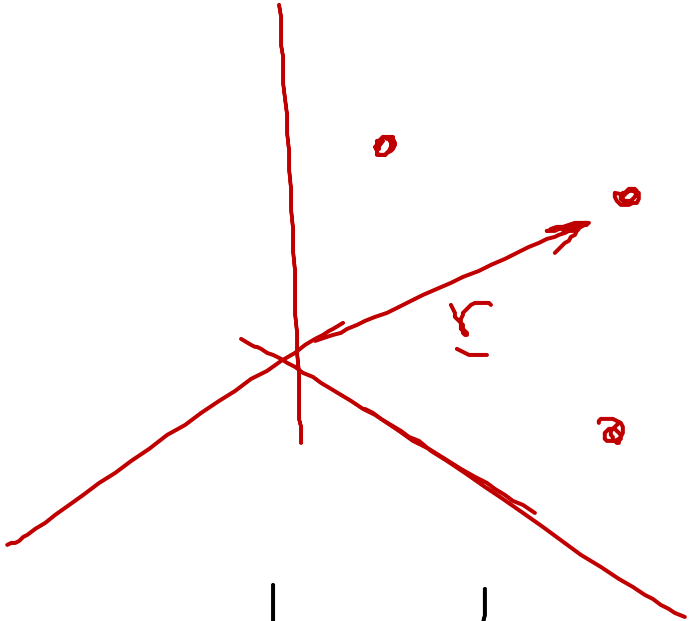
En coord. Cartesianas:

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \ldots)$$

Cantidad de movimiento o Momentum

Deriva de la homogeneidad del espacio.

Consideremos una traslación infinitesimal $\underline{\varepsilon}$. ⇒ la lagrangiana no debe cambiar.



$$\underline{r}_a \longrightarrow \underline{r}_a + \underline{\varepsilon}$$

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a}\,\delta \underline{r}_a = \underline{\varepsilon}\cdot\sum_a \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = 0$$

$$\boxed{\sum \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = 0} \quad (*)$$

Luego, en las ec. Lagrange:

$$\sum_a \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a} - \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a} = 0$$

O sea $\displaystyle \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \underline{v}_i}\right)}_{\underline{P}} = 0$

$$\frac{d}{dt}\underline{P} = 0$$

$\underline{P}$ es constante

$\underline{P}$ es "momentum" o "cantidad de movimiento"

Usando $L = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(\underline{r}_1, r_2 \ldots)$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_i} = m_i \underline{v}_i \implies \boxed{\underline{P} = \sum_i m_i \underline{v}_i}$$

Se ve inmediatamente la aditividad $\left(\sum_A + \sum_B\right)$

En (*) $\dfrac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = -\dfrac{\partial U}{\partial \underline{r}_a} \Rightarrow \underline{F}_a$ fuerza total sobre la a-ésima partícula.

Luego $\displaystyle\sum_a \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = 0 \Longleftrightarrow \sum_a \underline{F}_a = 0$ p/un sistema cerrado

Ej: Si tenemos 2 partículas $\Rightarrow \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0$ (acción y reacción, 3° ley de Newton)

Si trabajamos c/coord generalizadas

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{"momento generalizado"}$$

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \text{"fuerzas generalizadas"}$$

Usando esta notación, las ecs de Lagrange se escriben:

$$\dot{p}_i = F_i \qquad i = 1, \dots s$$

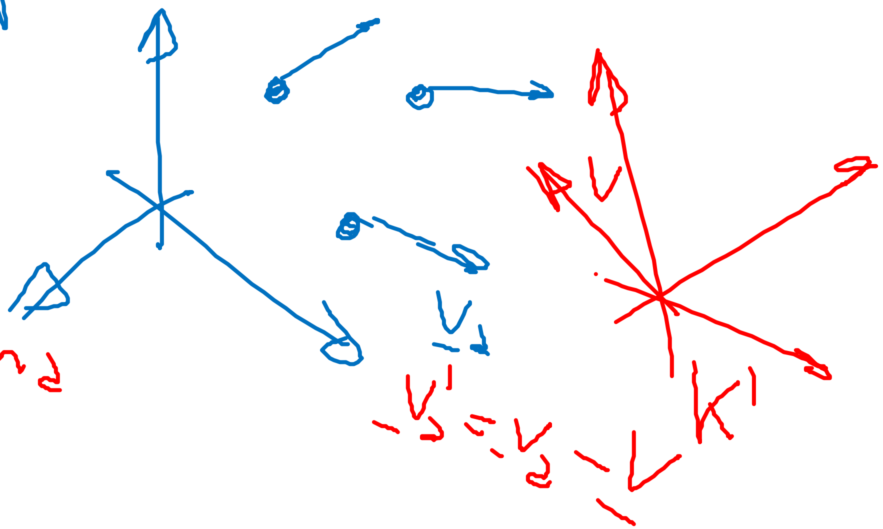
Centro de masa

Sist cerrado. La cant de mov difiere en dist MI.

K' se mueve a vel V respecto de K.

$$\therefore \quad \underline{v}_a = \underline{v}'_a + \underline{V}$$

$$\underline{P} = \sum m_a \underline{v}_a = \underbrace{\sum m_a \underline{v}'_a}_{\underline{P}'} + \underline{V} \sum m_a$$



En particular siempre habrá un marco K' en el cual $\underline{P}' = 0$

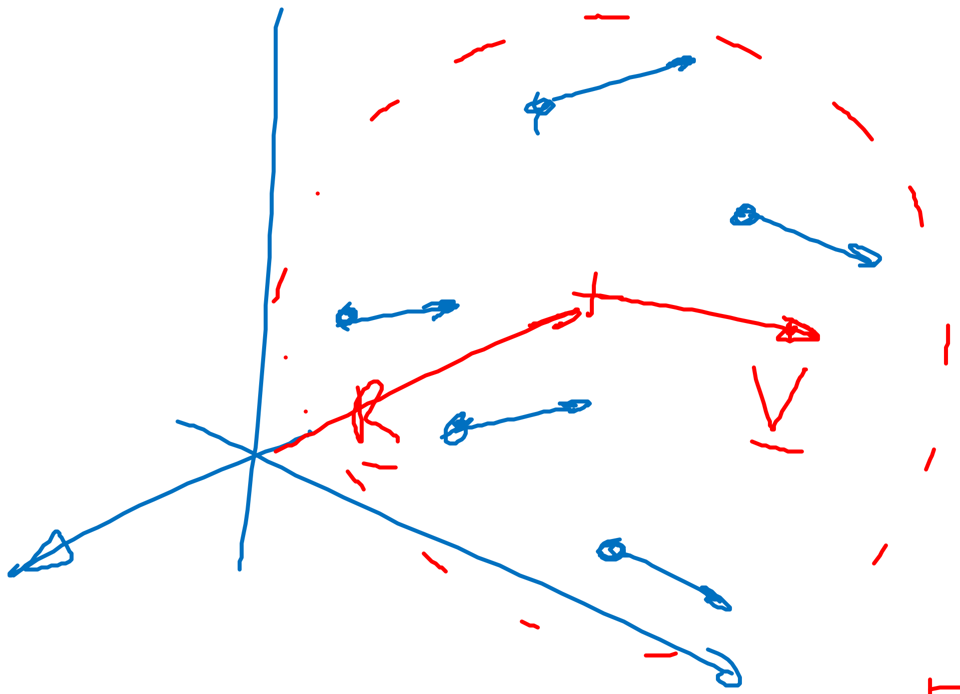
Luego
$$\underline{V} = \frac{\underline{P}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \underline{v}_i}{\sum_i m_i}$$
$\underline{V}$ es la vel de ese marco part.

Decimos luego que el sistema está "en reposo" respecto de ese marco.

Además
$$\underline{P} = \sum_i m_i \underline{V}$$
(equiv a 1 partícula)

→ Puede ser visto como
$$\frac{d}{dt}\underline{R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i}\right)$$

∴ La vel del sistema es la tasa de mov de un pto de posición $\underline{R}$



Este punto es el "centro de masa" del sistema.

Es natural p/ sistema cerrado pararse en el centro de masa (MI)

El sist como un todo lo vemos en reposo.

La energía cinética del sistema en reposo como un todo la llamamos "energía interna E_i".

E_i = energía cinética del movimiento relativo + energía pot. relativa de partículas.

$$E = \frac{1}{2}\mu V^2 + E_i \qquad \mu = \sum m_a$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum m_a \left(\underline{v}'_a + \underline{V}\right)^2 + U =$$

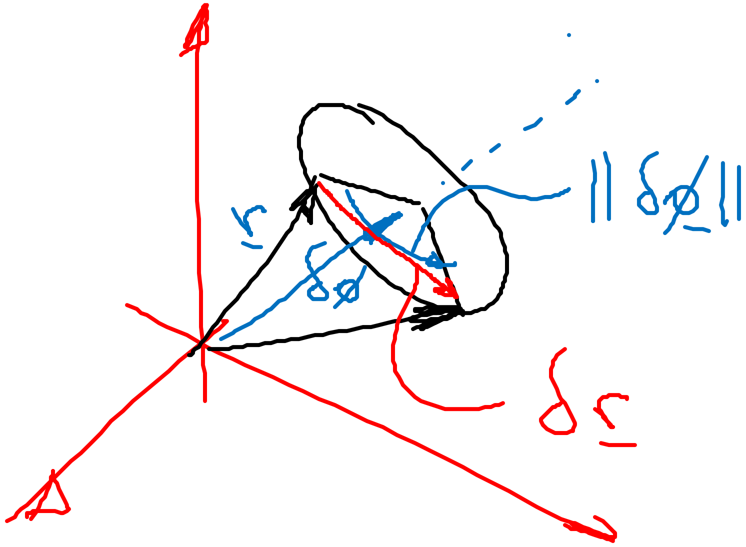
$$= \frac{1}{2}\mu V^2 + \underline{V}\cdot\underbrace{\sum_i m_a \underline{v}'_a}_{P' = 0} + \frac{1}{2}\sum_i m_a v_a'^2 + U$$

$$\therefore\ E = \frac{1}{2}\mu V^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_a v_a'^2 + U}_{E_i}$$

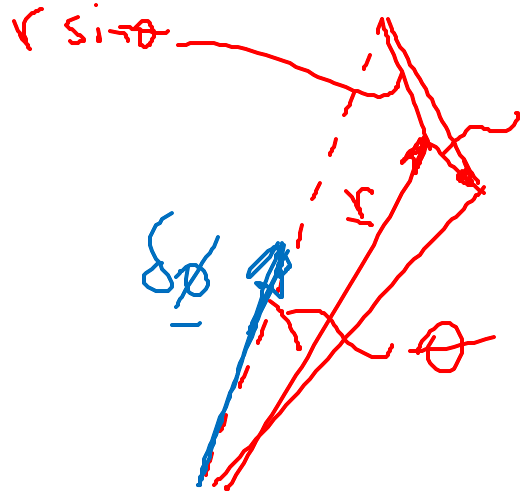
Momentum angular o cantidad de movimiento angular

Deriva de la isotropía del espacio (invariancia frente a rotaciones)

Consideramos una rotación infinitesimal $\delta \underline{\phi}$



$\delta\underline{\phi} \ll 1$



$\|\delta\underline{r}\| = r\sin\theta\,\delta\phi$

$$\delta\underline{r} = \delta\underline{\phi}\times\underline{r}$$

$$\delta\underline{v} = \delta\underline{\phi}\times\underline{v}$$

$$\delta L = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_i}}_{\underline{p}_i} \cdot \delta \underline{v}_i + \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \cdot \delta \underline{r}_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_i}\right) = \dot{\underline{p}}_i$$

$$a \cdot b \times c = b \cdot c \times a$$

$$\sum_i \left(\underline{p}_i \cdot \delta \underline{\phi} \times \underline{v}_i + \dot{\underline{p}}_i \cdot \delta \underline{\phi} \times \underline{r}_i \right) = 0$$

$$\sum_i \left(\delta \underline{\phi} \cdot \underline{v}_i \times \underline{p}_i + \delta \underline{\phi} \cdot \underline{r}_i \times \dot{\underline{p}}_i \right) = 0$$

$$\delta \underline{\phi} \cdot \sum_i \left(\underline{v}_i \times \underline{p}_i + \underline{r}_i \times \dot{\underline{p}}_i \right) = 0$$

$$\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i$$

$$\delta \underline{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \left(\underline{r}_i \times \underline{p}_i \right)}_{\underline{M}} = 0$$

$\underline{M}$: mom angular o cantidad angular

$\underline{M}$ se conserva durante el mov. del sistema aislado.

$\underline{M}$ es aditiva

Encontramos energía, momentum lineal, momentum angular] $\exists$ integrales de movimiento aditivas

NO EXISTEN OTRAS INTEG DE MOV ADITIVAS

En la def de mom angular interviene la posición de las partículas.

$\therefore$ $\underline{M}$ depende del origen de coordenadas.

Sean dos marcos /

$$\underline{r}_a = \underline{r}'_a + \underline{a}$$

$\underline{a}$ distancia entre K y K'

$$\underline{M} = \sum_a \underline{r}_a \times \underline{p}_a = \underbrace{\sum \underline{r}'_a \times \underline{p}_a}_{\underline{M}'} + \underline{a} \times \underbrace{\sum_a \underline{p}_a}_{\underline{P}}$$

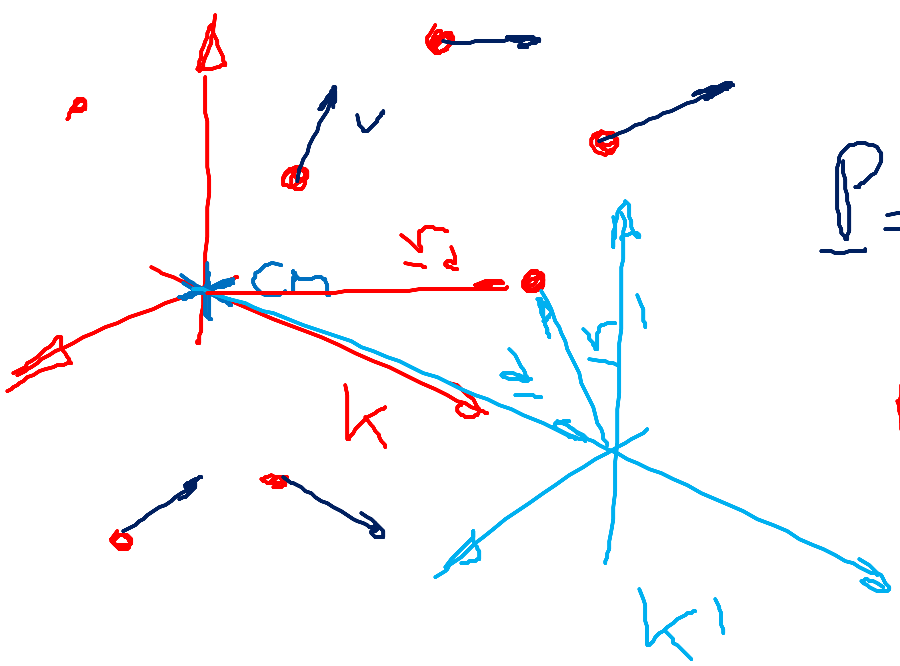
$$\underline{M} = \underline{M}' + \underline{a} \times \underline{P}$$

Si K está en centro de masa $\Rightarrow$ $\underline{P} = 0$ y tenemos

$$\underline{M} = \underline{M}'$$

$$\sum_i \underline{r}_a \times \underline{p}_a$$

$$\sum_i \underline{r}_a \times m_a \underline{v}_a$$



$$\underline{P} = \sum_i m_a \underline{v}_a = 0$$

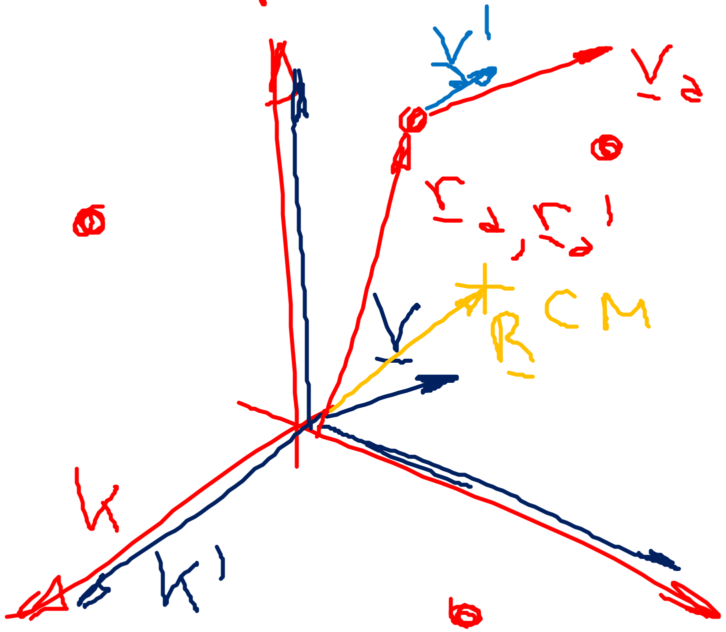
AMBOS VEN LAS MISMAS VELOCIDADES

Sean ahora 2 MI K, K' / K' se mueve a veloc $\underline{V}$ respecto K

Supongamos que en un determinado momento, los orígenes de K y K' coinciden

∴ los radios vectores coinciden en ese momento. Pero, las veloc partículas

$$\underline{v}_a = \underline{v}_a' + \underline{V}$$



$$\underline{M} = \sum_a m_a \underline{r}_a \times \underline{v}_a =$$

$$= \underbrace{\sum m_a \underline{r}_a \times \underline{v}_a'}_{\underline{M}'} + \underbrace{\sum_a m_a \underline{r}_a}_{\underline{R}\underbrace{\sum m_a}_{\mu}} \times \underline{V}$$

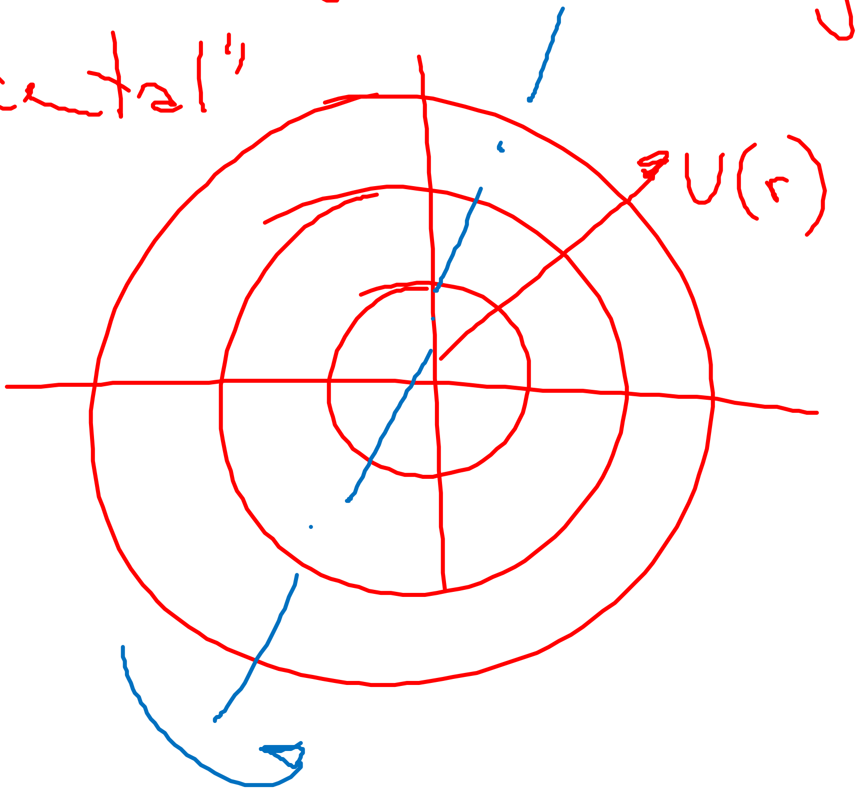
$$\underline{M} = \underline{M}' + \mu \underline{R} \times \underline{V}$$

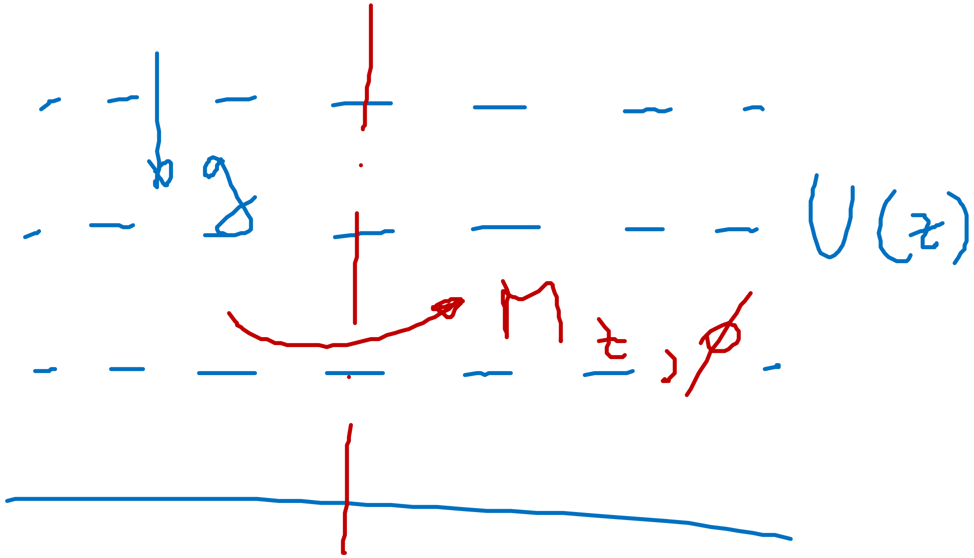
Si K' / sist reposo $\Rightarrow \underline{M} = \underline{M}' + \underline{R} \times \underline{P}$

Si tenemos un sistema en un campo simétrico respecto de eje ⇒ las prop mecánicas no cambian por rotaciones arbitrarias respecto de ese eje, encontramos luego conservación de mom angular relativo a un origen sobre ese eje.

Caso "campo simétrico central"

El mom angular respecto de cualq eje que pase por el centro se conserva.





$$M_z = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_j}$$