

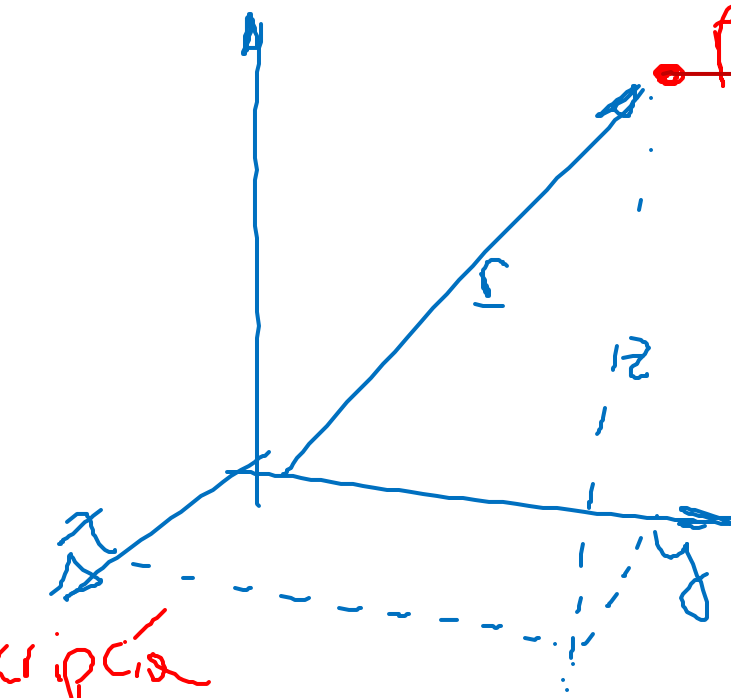
Mecánica Racional

1) ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

i) Coordenadas generalizadas

Def: Partícula

Cuerpo cuyas dimensiones pueden desprejarse en la descripción del movimiento



$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

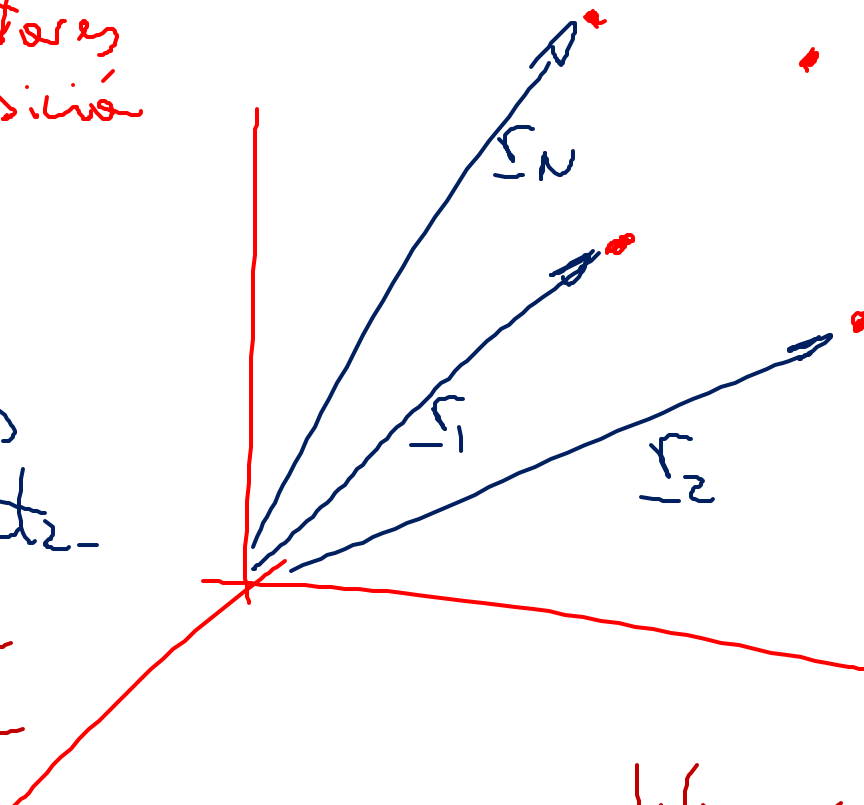
$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} \quad \underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{v}}$$

N partículas $\Rightarrow N$ vectores
posición

$\therefore 3N$ coordenadas

La cantidad de parámetros
independientes p/determinar completa-
mente un sistema $\Rightarrow$ # grados de
libertad



Todo conjunto de s cantidades $q_1, q_2, \dots, q_s$ que defina completamente
un sistema $\Rightarrow$ "coordenadas generalizadas del sistema"

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_s \Rightarrow$ "velocidades generalizadas del sistema".

"Estado mecánico" no queda completamente determinado por las coordenadas generalizadas.

$$q_1, q_2, \dots, q_s \quad \text{y} \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$$

$\neq$

$$q_1, q_2, \dots, q_s \quad \text{y} \quad \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_s$$

Si todas las coordenadas y velocidades generalizadas se conocen, se sabe por experiencia que el "Estado mecánico" está completamente determinado.

Las relaciones entre aceleraciones, velocidades y coordenadas que se verifican en un movimiento $\Rightarrow$ "Ecuaciones del movimiento"

Principio de mínima acción (principio de hamilton)

Todo sistema mecánico está caracterizado por una función escalar:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \equiv L(q, \dot{q}, t)$$

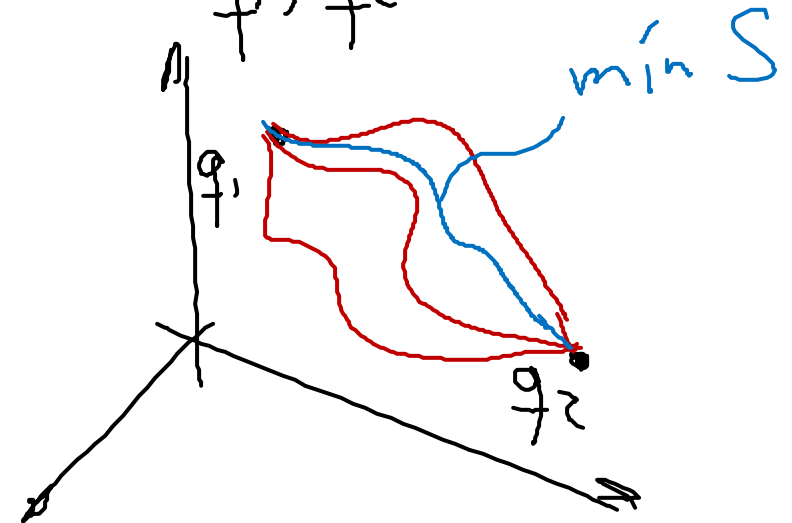
El movimiento está tal que se cumple la condición sobre L .

Sea un sistema q / o un q_2 entre t_1, t_2 posiciones q_1, q_2 .

El movimiento está tal que

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

es mínimo



Por simplicidad, asumimos 1 GDL

Sea $q(t)$ la función P/la cual S es mínimo.

Luego

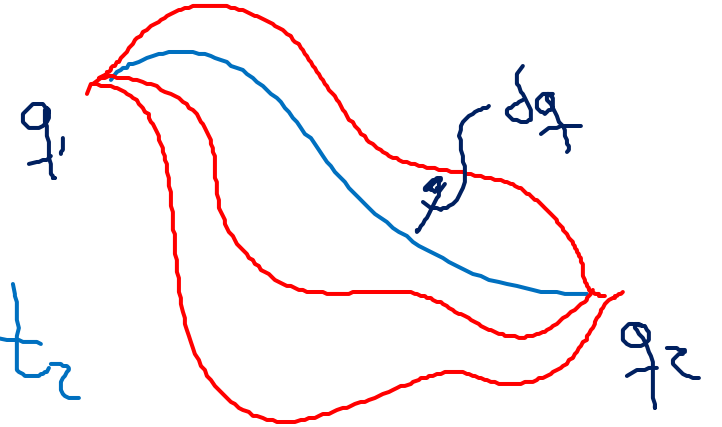
$$q(t) + \delta q(t) \Rightarrow S \text{ crece}$$

$\delta q(t)$ es "pequeño" en el intervalo $t_1 \rightarrow t_2$

$$\delta q(t) /$$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$



$$\underline{S \text{ minimo}} \iff \delta S = 0$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$$

Int P/potes

$$\delta S = \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0$$

$$\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0 \quad \delta q \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Para s GDL:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i=1, 2 \dots s$$

Ecuaciones de
Lagrange

Sistema de s ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden.

Se debe determinar 2s constantes arbitrarias. $\Rightarrow$ se obtiene
del conocimiento del estado mecánico del sistema al tiempo inicial.

$q_i, \dot{q}_i(t_0) \Rightarrow 2s$ condiciones iniciales.

Sea un sistema compuesto por dos partes A y B.

Si A y B fueran cerradas $\Rightarrow \mathcal{L}_A$ y $\mathcal{L}_B$

Si la distancia entre las dos partes es tal q no hay interacción

$$\lim_{\substack{\text{dist} \rightarrow \infty \\ A, B}} \mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$$



Nota

mov sist /

$$S = \int \mathcal{L} = \min$$

Luego, si definimos

$$\mathcal{L}^* = C \mathcal{L} \Rightarrow \min S^* \text{ equiv } \min S$$

OJO: no podemos

$$\text{multip } \times C, \text{ en } A \\ \times C, \text{ en } B$$

Veremos + adelante

Sean L' y L / difiere por una función que es derivada total respecto del tiempo de una $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

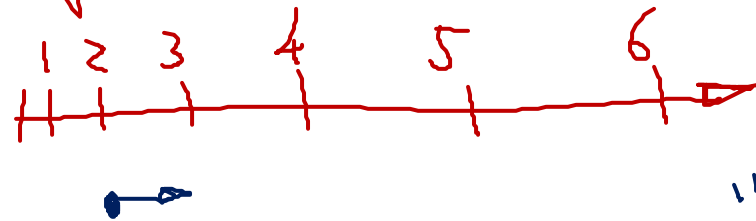
$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt}_S + f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)$$

$\therefore \delta S' = 0$ equiv $\delta S = 0 \Rightarrow$ El Lagrangiano está definido hasta la derivada temporal de una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo.

Principio de relatividad de Galileo

P/consider fenómenos e ámbitos, fijamos un marco de referencia.
Las leyes de movimiento difieren de un marco de referencia a otro.

¿Qué marco de referencia usar P/ tener leyes simples?
En un marco estacionario $\Rightarrow$ espacio puede ser inhomogéneo y anisotrópico.
Esto quiere decir q/ en un caso un cuerpo no interactúa con otros,
sus posiciones e espacio y sus orientaciones no se ven afectadas
equivalentes.



"Cuerpo libre tendrá
desaceleración"

UNL CONICET
C I M E C

Sin embargo, siempre se puede elegir un marco de referencia en el cual el espacio es homogéneo e isotrópico, y el tiempo homogéneo.

"MARCO INERCIAL"

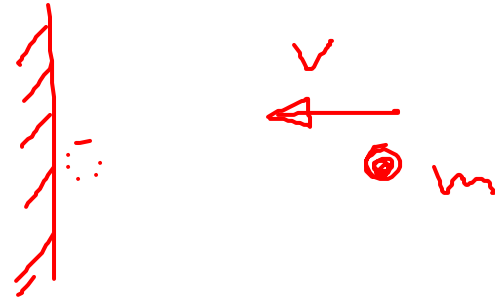
En particular, en este marco un cuerpo ^{libre} en reposo permanece siempre en reposo.

Vamos ahora qué forma puede tener la función Lagrangiana de una partícula libre moviéndose en un marco inercial.

- 1) La homogeneidad del espacio y el tiempo implica que L no puede depender de $\underline{r}$ ni de t . $\Rightarrow L(\underline{v})$
- 2) La isotropía del espacio, L debe ser independiente de la dirección de $\underline{v}$.
Por ejemplo, podría ser función de la magnitud de $\underline{v}$: $L(v^2)$
 $\sqrt{v^2}$?

i) Supongamos $\exists T = T(m, v)$

Consideremos una "bola de plastilina" masa m y velocidad v



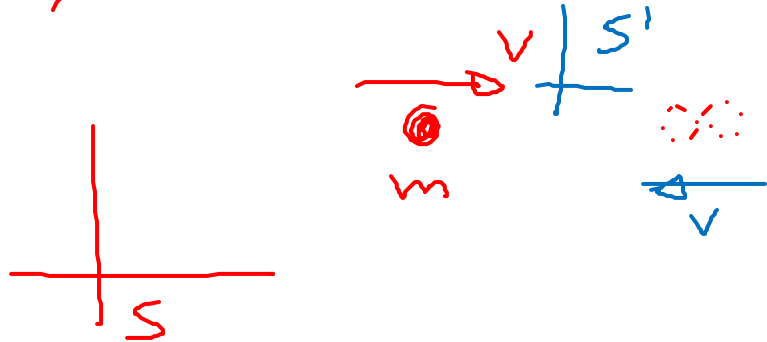
Impacta contra la pared
y no rebota.

Toda la energía se convierte en calor:

$$T(mv) = \Delta_{\text{heat}} = mT(v)$$

Experiencia $\Rightarrow$ la cantidad de calor depende linealmente de la masa

ii) Sea la colisión inelástica de 2 bolas de plastilina de masa m .



$$S \quad E_{\text{antes}} = 2mT(v) \quad E_{\text{desp}} = \Delta_{\text{heat}}$$

$$S' \quad E_{\text{antes}} = mT(2v) \quad E_{\text{desp}} = \Delta_{\text{heat}} + 2mT(v)$$

Miramos esta colisión en 2 marcos de referencia S y S'
fijo y S' v v

Por simetría, en S , las 2 bolas se pegan y quedan "quietas".

Además, el calor generado es: $2T(v)m$ y $\Delta_{\text{Heat}} = \Delta_{\text{heat}}'$

Conservación de energía:

$$E_{\text{antes}} = E_{\text{desp}} \Rightarrow$$

$$2mT(v) = \Delta_{\text{heat}}$$

$$mT(2v) = \Delta_{\text{heat}}' + 2mT(v) =$$

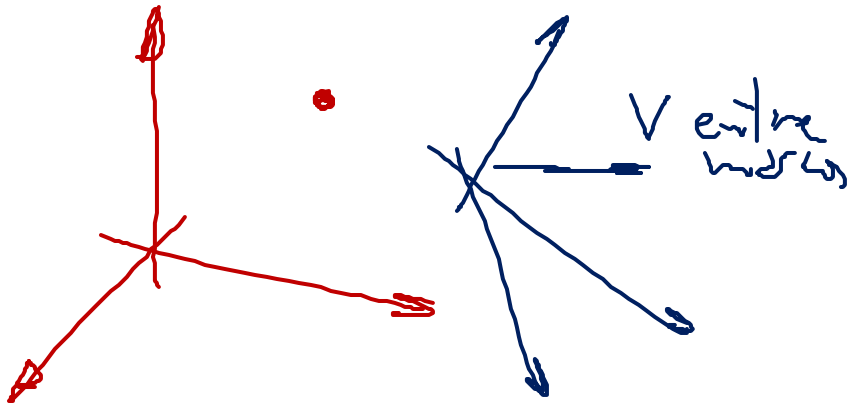
$$T(2v) = 4T(v) \Rightarrow T(v^2)$$

Luego, la ecuación que queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}} = \text{cte}$$

y como $\mathcal{L}(v^2) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}}$ es solo función de $\underline{v} \Rightarrow \underline{v} = \text{cte}$

En un marco inercial, todo movimiento libre tiene lugar con una velocidad cte en magnitud y dirección $\Rightarrow$ LEY DE INERCIA



Los experimentos muestran que en todo marco inercial las leyes de la mecánica son las mismas.

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD
DE GALILEO

$\underline{r}, \underline{r}'$ coord de un pto en los mvos inerc K y K'
 K' se mueve a velocidad $\underline{V}$ respecto de K .

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{r} = \underline{r}' + \underline{V}t \end{array} \right. \quad \left(\text{donde } t = t' \right)$$

(TRANSF DE GALILEO)

Se puede formular el princ de relativ de GALILEO como invariancia de las ecs del mov bajo esta transform.

Lagrangiano de una partícula libre

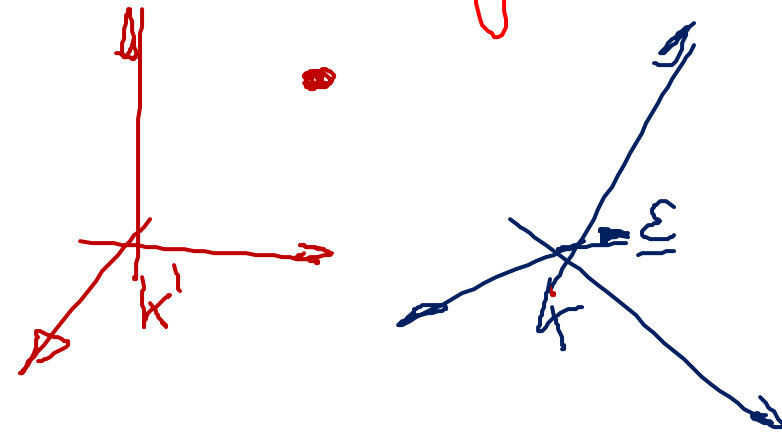
Mov libre de una partícula en un marco inercial.

Sabemos $L(v^2)$. Cual es la dependencia?

Usamos principio relati, Galileo

Sea K marco inercial moviéndose con velocidad infinitesimal $\underline{\varepsilon}$ relativo al MI K' .

luego
$$\underline{v}' = \underline{v} + \underline{\varepsilon}$$



Las ecs de movimiento deben tener la misma forma esto de un vco

$\mathcal{L}(v^2) \rightsquigarrow \mathcal{L}'$ / difiere de $\mathcal{L}$ a la derivada de un $f(q, \dot{q})$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(v'^2) = \mathcal{L} \left(\underbrace{v^2 + 2\underline{\varepsilon} \cdot \underline{v} + \varepsilon^2}_x \right) =$$

Desarroll x Taylor:

$$= \mathcal{L}(v^2) + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} \frac{\partial x}{\partial \underline{\varepsilon}} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \dots$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(v^2) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} 2\underline{v} \cdot \underline{\varepsilon}}_{(*)} \frac{d}{dt} f(q, \dot{q})?$$

Esto se cumple solo si $(*)$ es una función lineal de $\underline{v}$

Luego:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} = cte$$

Entonces:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2$$

Sean K, K' movimientos $\underline{V}$ fijos uno de otro.

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (\underline{v} + \underline{V}) \cdot (\underline{v} + \underline{V}) = \frac{1}{2} m v^2 + m \underline{v} \cdot \underline{V} + \frac{1}{2} m V^2$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(m \underline{r} \cdot \underline{V} + \frac{1}{2} m V^2 t \right)}_{f(\underline{r}, t)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Verif princ} \\ \text{relat Galileo} \end{array} \right)$$

La cte m es llamada masa de la partícula.

Por propiedad aditiva, para N partículas $\&$ no interacción tengo:

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

Se pueden q/ la masa no puede ser negativa:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt \quad \text{mov/} \quad \underline{S \text{ m\u00ednimo}}$$

$m > 0$

Nota:

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$$

P/ obtener la Lagrangiana, al calcular el cuadrado de dl

En Cartesianas: $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Cil\u00edndricas: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$

Lagrangiano de un sistema de partículas

Consideramos sist de part & interacción entre ellas (no con el mundo)
"SISTEMA CERRADO"

"Se encuentra" que la interacción entre part se obtiene a partir de una cierta función de las coordenadas, que depende de la naturaleza de la interacción.

$$L = \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2}_{\text{"Energía cinética"}} - \underbrace{U(r_1, r_2, r_3, \dots)}_{\text{"Energía Potencial"}}$$



La energía potencial
al resto.

$f(r) \Rightarrow$ un campo de posición de una partícula afecta a todas las demás.

U No puede depender de v porque de ser así, las leyes de movimiento diferirían en MI que se venen uno resp de otro. (Viola relati de Galileo)

⊗ ⇒ Un cambio de t por $-t$ no cambia el $\mathcal{L} \Rightarrow$ ley de conservación.
no cambia.

⇒ tiempo es reversible → poder ir y volver en el tiempo.

Ecs de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}_a} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_a} \quad a=1, \dots, S$$

Substituyendo ⊗

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\sum \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i \right)}{\partial \underline{v}_a} \right) = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a}$$

$$\frac{d}{dt} (m \underline{v}_a) = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a}$$

⇒

$$m \frac{d \underline{v}_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a} \quad a=1, \dots, S$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a} = \underline{F}_a$$

Fuerza ~~de~~ atracción sobre la partícula a

$$m \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_2$$

U función de coord $\Rightarrow \mathbf{F}_2$ es toda función de $\underbrace{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots}_{\text{solamente}}$

Luego $\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$ es sólo función de la posición

U está indeterminada a una constante: $U_1 = U + C$

Normalmente C se fija de forma que $U_1 \rightarrow 0$ cuando las partículas se alejan

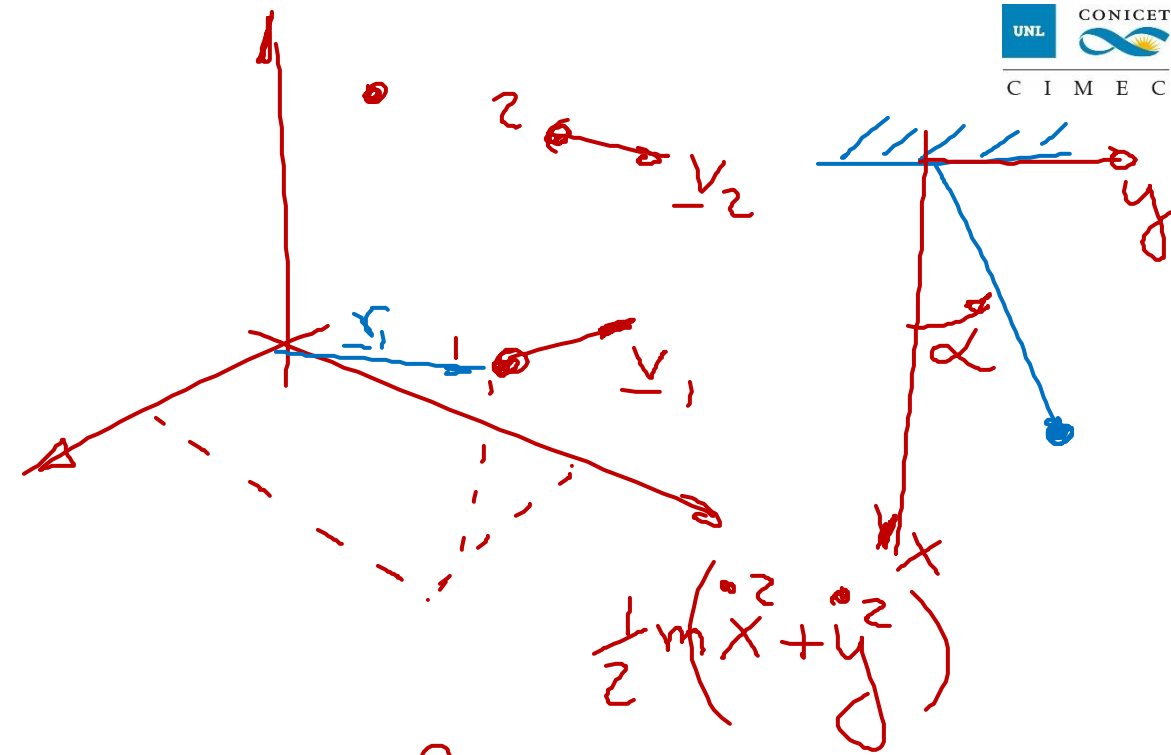
Si usuarios could generalized:

$$\underline{r}_2 = \underline{f}_2(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\underline{v}_2 = \sum_k \frac{\partial \underline{f}_2}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \end{pmatrix} = \underline{f}(\alpha)$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \begin{pmatrix} -R \sin \alpha \\ R \cos \alpha \end{pmatrix} \dot{\alpha}$$



$$x = R \cos \alpha$$

$$y = R \sin \alpha$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U = \frac{1}{2} m_a \underline{v}_a \cdot \underline{v}_a - U$$

Substituyo $x_a, y_a, z_a \dots$

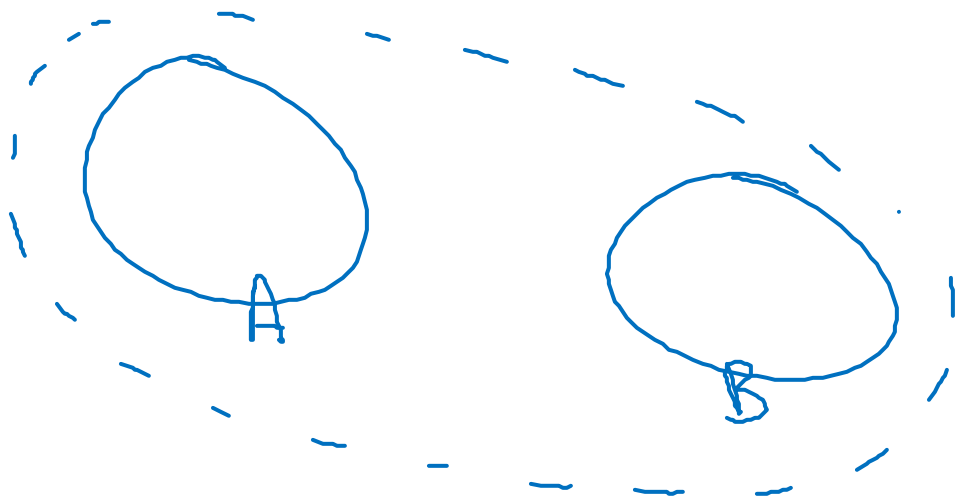
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_a m_a \left(\frac{\partial f_a}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^T \left(\frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) - U$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U$$

$$\sum_a m_a \left(\frac{\partial f_a}{\partial q_i} \right)^T \left(\frac{\partial f_a}{\partial q_k} \right)$$

sólo función de las coordenadas

$a_{ik}(q)$ matriz de
masas generalizada
matriz simétrica.
función de q
Energía cinética expresada en
las velocidades generalizadas



$$L = L_A + L_B$$

B "ejecuta un movimiento dado"

A no es cerrado. Interactúa con B.

Diríamos q/A se mueve en un campo generado por B.

Podemos ver el lagrangiano de A como el lagrangiano total de donde las coord de B este reemplazado por funciones de tiempo.

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$$

$q_B = q_B(t)$
 $f^*(t) = \frac{d}{dt} f(t)$
 $q_B(t) \equiv U^*(q_A, t)$

$$\mathcal{L} = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, t)$$

Un sist abierto se representa por una función Lagrangiana donde la energía potencial depende también del tiempo.

Ejemplo:

Partícula e campo externo:

Ecs de movimiento

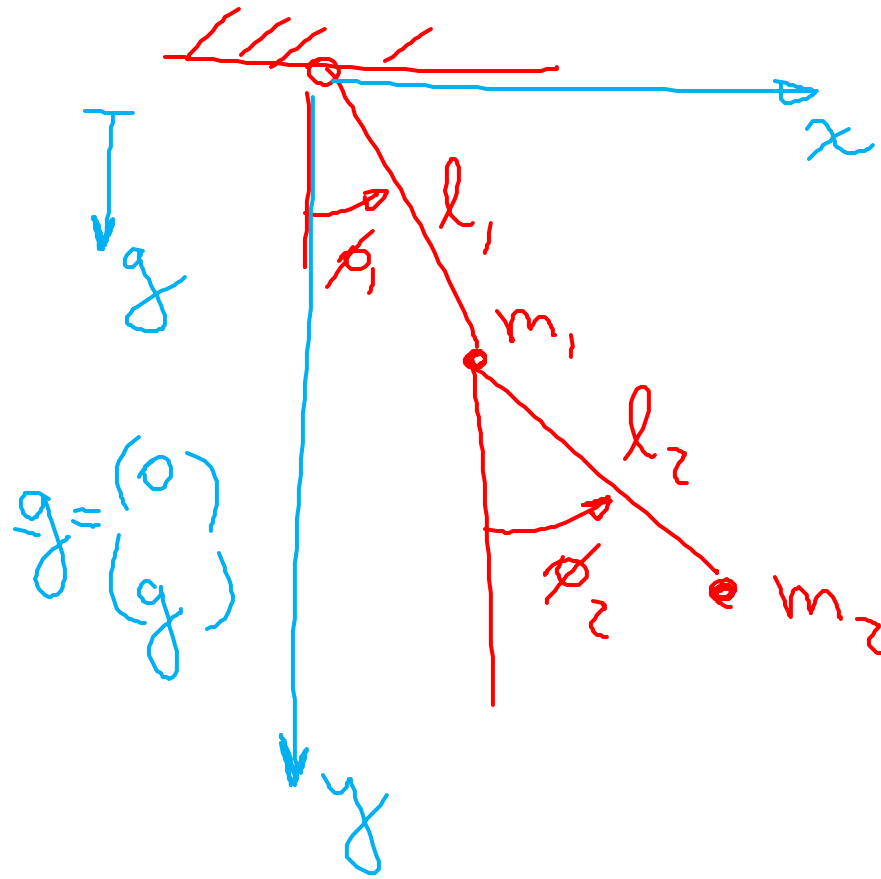
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(r, t)$$

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r}$$

Campo uniforme $\Rightarrow$ la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula es siempre la misma en todo lugar.

Ejemplo campo:
$$U = -\underline{F} \cdot \underline{r} \quad -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} = \underline{F} \quad (\text{cte})$$

En sist mecánicos aparece restricciones al movimiento (barras, articulaciones)
 Usar coordenadas generalizadas.



$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin \phi_1 \\ l_1 \cos \phi_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \phi_1 \\ -l_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix} \dot{\phi}_1$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(l_1^2 \cos^2 \phi_1 + l_1^2 \sin^2 \phi_1 \right) \dot{\phi}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2$$

$$V_1 = -m_1 g \cdot r_1 = -m g l_1 \cos \phi_1$$

$$V_2 = -m g (l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \sin \phi_2 \\ l_2 \cos \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin \phi_1 \\ l_1 \cos \phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \sin \phi_2 \\ l_2 \cos \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \phi_1 \\ -l_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix} \dot{\phi}_1 + \begin{pmatrix} l_2 \cos \phi_2 \\ -l_2 \sin \phi_2 \end{pmatrix} \dot{\phi}_2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \underbrace{(\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)}_{\cos(\phi_1 - \phi_2)} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right)$$

$$U_2 =$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2$$

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0 \quad i=1,2$$

$$\begin{cases} f_1(\ddot{q}_1, \dot{q}_1, q_1, \ddot{q}_2, \dot{q}_2, q_2, t) = 0 \\ f_2(\ddot{q}_1, \dot{q}_1, q_1, \ddot{q}_2, \dot{q}_2, q_2, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1(y, \dot{y}, t) = 0 \\ g_2 = 0 \\ g_3 = 0 \\ g_4 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = q_1$$

$$y_2 = \dot{q}_1$$

$$y_3 = q_2$$

$$y_4 = \dot{q}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 \Rightarrow \dot{y}_2$$

$$\ddot{q}_2 \Rightarrow \dot{y}_4$$

$$f_1(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, t) \Rightarrow g_1(y_1, y_2, \dot{y}_2, y_3, y_4, \dot{y}_4, t) = 0$$

$$g_2(\cdot) = y_2 - \dot{y}_1 = 0$$

$$g_3(\cdot)$$

$$g_4 = y_4 - \dot{y}_3 = 0$$

$$\dot{y} = g^*(y, t)$$

File doublePendulum1.tex

```

doublePendulum1 := proc()
#
#####
#
# computation of the Lagrangian of the double pendulum
#
# q := generalized coordinates vector
# q[1] := bar 1 angle
# q[2] := bar 2 angle
# qp := generalized velocities vector
# k := kinetic energy of the system
# v := potential energy of the system
# la := Lagrangian
# n := number of degrees of freedom
# l1 := length of bar 1
# l2 := length of bar 2
# m1 := mass 1
# m2 := mass 2
# k1,k2,k3,k4 := constants
#
#####
#

global k, v, n, la, q, qp;
k := .5*(m1+m2)*l1^2*qp[1]^2 + .5*m2*l2^2*qp[2]^2 +
    m2*l1*l2*cos(q[1]-q[2])*qp[1]*qp[2];
v := (m1+m2)*g*l1*cos(q[1]) + m2*g*l2*cos(q[2]);
n := 2;
la := k - v;
end proc;

```



```

eqnMotion := proc(la,q,dq,ddq,n)
#
#####
#
# computation of the equations of motion of a given system
#
# Input
# q := generalized coordinates vector (n*1)
# dq := generalized velocities vector (n*1)
# ddq := generalized accelerations vector (n*1)
# la := system Lagrangian
# n := number of equations of motion and of variables
#
# Output
# Mass := mass matrix (n*n)
# Forc1:= generalized internal and damping forces (n*1)
#
#####
local i,j,Forc,dql,dvl,ddvl,u,du,Mass,Forc1;

dql := array(1..n); dvl := array(1..n);
ddvl := array(1..n); Forc := array(1..n);
u := array(1..n); du := array(1..n);

for i to n do
    dvl[i] := evalm(diff(la,dq[i]));
    dql[i] := evalm(diff(la,q[i]));
od;

for i to n do
    for j to n do
        dvl[i] := subs( dq[j] = diff(u[j](t),t),
            q[j] = u[j](t),
            dvl[i]);
    
```

```

    dq[i] := subs( dq[j] = diff(u[j](t),t),
                  q[j] = u[j](t),
                  dq[i]);
  od;
od;

for i to n do
  ddvl[i] := diff(evalm(dvl[i]),t);
  Forc[i] := simplify(ddvl[i] - dq[i]);
od;

for i to n do
  for j to n do
    Forc[i] := subs(diff(u[j](t),t,t)=ddq[j],
                    diff(u[j](t),t) =dq[j],
                    u[j](t)      =q[j],
                    Forc[i]);
  od;
od;

Mass := array(1 .. n, 1 .. n);

for i to n do
  for j to n do
    Mass[i, j] := simplify(diff(Forc[i], ddq[j]));
  od;
od;

Forc1 := array(1 .. n);
Forc1 := simplify(evalm(Forc- Mass&*ddq));

return evalm(Mass),evalm(Forc1);
end;
```

```

> restart;
> read "doublePendulum1.tex" :
> qpp := array(1..2)
                                qpp := array(1..2, [ ])
> read "eqnMotion.tex" :
> doublePendulum1( );
                                0.5 (m1 + m2) l1^2 qp1^2 + 0.5 m2 l2^2 qp2^2 + m2 l1 l2 cos(q1 - q2) qp1 qp2 - (m1 + m2) g l1 cos(q1) - m2 g l2 cos(q2)
> Forc := array(1..2); Masa := array(1..2, 1..2);
                                Forc := array(1..2, [ ])
                                Masa := array(1..2, 1..2, [ ])
> Masa := eqnMotion(la, q, qp, qpp, 2)[1];
                                Masa := [ 1. l1^2 (m1 + m2)    1. l1 m2 l2 cos(q1 - q2)
                                           1. l1 m2 l2 cos(q1 - q2)    1. l2^2 m2 ]
> Forc := eqnMotion(la, q, qp, qpp, 2)[2];
                                Forc := [ 1. l1 (m2 l2 sin(q1 - q2) qp2^2 - g sin(q1) m1 - g sin(q1) m2) 1. (-l1 sin(q1 - q2) qp1^2 - g sin(q2)) m2 l2 ]
>
> with(CodeGeneration);
                                [C, CSharp, Fortran, IntermediateCode, Java, JavaScript, LanguageDefinition, Matlab, Names, Perl, Python, R, Save, Translate, VisualBasic]
> Matlab(evalm(Masa), resultname="Masa");
Masa = [0.1e1 * l1 ^ 2 * (m1 + m2) 0.1e1 * l1 * m2 * l2 * cos(q(1) - q(2)); 0.1e1 * l1 * m2 * l2 * cos(q(1) - q(2))
0.1e1 * l2 ^ 2 * m2;];
> Matlab(evalm(Forc), resultname="Fuerza");
Fuerza = [0.1e1 * l1 * (m2 * l2 * sin(q(1) - q(2)) * qp(2) ^ 2 - g * sin(q(1)) * m1 - g * sin(q(1)) * m2) 0.1e1 * (-l1 *
sin(q(1) - q(2)) * qp(1) ^ 2 - g * sin(q(2))) * m2 * l2];
>

```