6 Cinemática de rotaciones finitas

6.1 Movimiento esférico

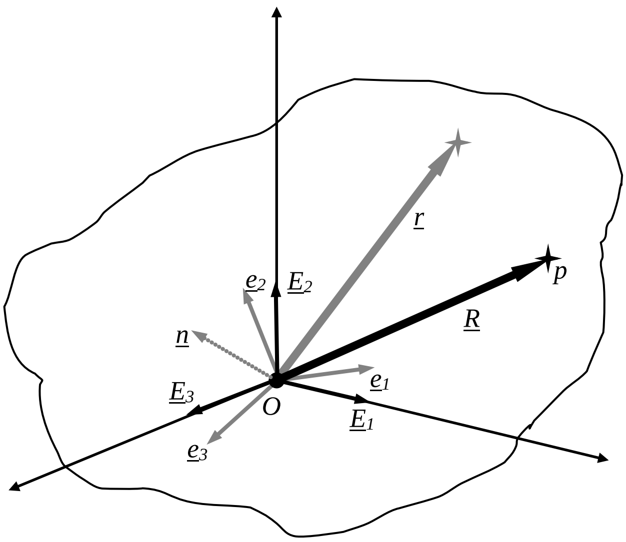
Definición:

Cuerpo rígido: Es un sistema de partículas tal que las distancias entre las distintas partículas no varía

Esta condición es ideal, pero en la mayoría de los casos en los sólidos pueden despreciarse los pequeños cambios de distancias que existen y considerar las leyes del movimiento del cuerpo como un todo.

Para simplificar, consideraremos al cuerpo como un conjunto discreto de partículas. Si se quiere pasar al contínuo, se deberá reemplazar la masa de cada partícula por $\rho.dV$, donde ρ es la densidad, e integrar en el volumen del cuerpo.

Movimiento esférico: Es aquel que describe un cuerpo rígido que gira con respecto a un punto fijo en el espacio (o).



El punto p pertenece al cuerpo. Por el movimiento p pasa a ocupar la posición definida por $\underline{r}$.

Este movimiento se caracteriza por dos propiedades.

(i) La longitud de $\underline{R}$ no cambia $\Rightarrow \left\|\underline{r}\right\| = \left\|\underline{R}\right\|$ *(228)*

(ii) Como el cuerpo es rígido, el ángulo relativo entre dos vectores arbitrarios fijos al cuerpo no cambia.

Sean $\left[\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\right]$ vectores ortonormales fijos al cuerpo en la configuración de referencia, y $\left[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\right]$, los mismos vectores después de la transformación.

Puede demostrarse que este movimiento de rotación es una transformación lineal $\underline{r} = \Re\left(\underline{R}\right)$. Entonces, admite una representación matricial:

$$\boxed{\underline{r} = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{R}} \qquad (229)$$

Para ser una transformación lineal, debería ser $\det \underline{\underline{\Lambda}} = 1$. A su vez, será:

$$\underline{e}_i = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{E}_i \qquad (230)$$

Por la primera propiedad (228), puede escribirse: $\underline{r}^T \underline{r} = \underline{R}^T \underline{R}$ *(231)*

$$\therefore \quad \left(\underline{\underline{\Lambda}} \underline{R}^T\right)\left(\underline{\underline{\Lambda}} \underline{R}\right) = \underline{R}^T \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}} \underline{R} = \underline{R}^T \underline{R} \qquad \forall \underline{R} \qquad (240)$$

Por ser $\underline{R}$ arbitrario $\Rightarrow \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{\Lambda}}$ es ortogonal $\Rightarrow \underline{\underline{\Lambda}}^T = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$

$$\therefore \quad \det\left(\underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}}\right) = \det\left(\underline{\underline{\Lambda}}^T\right)\det\left(\underline{\underline{\Lambda}}\right) = \det\left(\underline{\underline{I}}\right) \Rightarrow \det\left(\underline{\underline{\Lambda}}\right) = \pm 1$$

La expresión anterior indica que no hay expansión, por lo que se mantiene la norma. En cuanto al signo, se debe tener en cuenta que el cambio debe ser de un sistema dextrógiro o de mano derecha a otro sistema dextrógiro.

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \left[\left(\underline{E}_1 \times \underline{E}_2\right) \cdot \underline{E}_3\right] = 1 \\ \left[\left(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2\right) \cdot \underline{e}_3\right] = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \textit{regla de la mano derecha} \qquad (241)$$

Definimos: $\underline{\underline{A}} \triangleq \left[\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\right]$; $\underline{\underline{B}} \triangleq \left[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\right]$

Por las propiedades anteriores, se verifica $\det \underline{\underline{A}} = 1; \det \underline{\underline{B}} = 1$.

Además $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{A}}$, por lo tanto, $\det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{\Lambda}} \det \underline{\underline{A}}$ lo que indica que $\det\left(\underline{\underline{\Lambda}}\right) = +1$.

Si fuera $\det\left(\underline{\underline{\Lambda}}\right) = -1$, la transformación sería una reflexión. Esto indica que la matriz de rotación es una *matriz ortogonal propia*, por ser su determinante igual a 1.

Analizamos el espectro de $\underline{\underline{\Lambda}}$, es decir, como son sus valores y vectores propios.

$$\underline{\underline{\Lambda}} \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \qquad (242)^1$$

Por ser $\det\left(\underline{\underline{\Lambda}}\right) = +1 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\underline{\underline{\Lambda}}\right) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = +1$ *(243)*

Expandiendo en la base de autovectores normalizados:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \sum_{i=1,3} \lambda_i \underline{x}_i \underline{x}_i^* \qquad (244)^2$$

---

[1] $\underline{\underline{\Lambda}} \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \Rightarrow \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}[\lambda] = \left[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$; [λ] es una matriz diagonal

[2] $\underline{x}_i^* =$ transpuesto conjugado, ya que pueden haber complejos. El producto columna por fila da una matriz cuadrada

Estando los autovectores normalizados:

$$\underline{\underline{X}}^* \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^{-1} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{I}} \qquad \therefore \qquad \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{X}}[\lambda]\underline{\underline{X}}^* \tag{245}$$

Por lo tanto, (244) y (245) son iguales.

Siendo $\underline{\underline{\Lambda}}$ real, será $\underline{\underline{\Lambda}}^T = \underline{\underline{\Lambda}}^* = \underline{\underline{X}}[\lambda^*]\underline{\underline{X}}^*$

$$\therefore \qquad \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{X}}[\lambda^*]\underline{\underline{X}}^* \underline{\underline{X}}[\lambda]\underline{\underline{X}}^* = \underline{\underline{I}} \tag{246}$$

$$\therefore \qquad tr\left(\underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}}\right) = tr\left(\underline{\underline{X}}[\lambda^*][\lambda]\underline{\underline{X}}^*\right) = tr\left([\lambda^*][\lambda]\right) = 3 \tag{247}$$

Luego, se puede escribir el sistema que dará los autovalores de la matriz como:

$$\begin{cases} |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + |\lambda_3|^2 = 3 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \end{cases} \tag{248}$$

Puede verificarse que $\lambda_1 = 1; \lambda_{2,3} = e^{(\pm i\phi)}$, con ϕ arbitrario, es una solución del sistema.

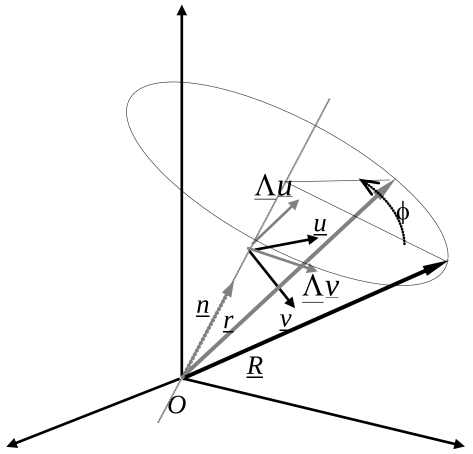
Notar que $\underline{\underline{\Lambda}}$ es una matriz ortogonal propia, tiene un autovector $\underline{n}$ tal que $\underline{n}^T\underline{n}=1$, y además $\underline{\underline{\Lambda}}\underline{n} = \underline{n}$ o también $\underline{\underline{\Lambda}}\alpha\underline{n} = \alpha\underline{n}$. Por lo tanto, $\underline{n}$ es el *eje de la rotación.* Todo punto que esté sobre el eje de rotación no resulta afectado por la misma.

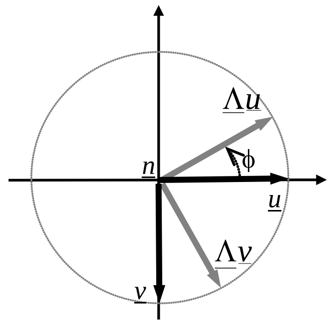
Los autovectores asociados a λ_2 y λ_3 son complejos conjugados. Podemos expresar $\underline{\underline{X}} = [\underline{n}; \underline{u} + i\underline{v}; \underline{u} - i\underline{v}]$. Luego:

$$\underline{\underline{X}}^* = \begin{bmatrix} \underline{n} \\ \underline{u}^T - i\underline{v}^T \\ \underline{u}^T + i\underline{v}^T \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\underline{\underline{X}}^* \underline{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{I}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{n}^T \underline{u} = \underline{n}^T \underline{v} = 0 \tag{249}$$

Luego, $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son ortogonales a $\underline{n}$. Además, $\underline{u}^T \underline{v} = 0$, por lo que $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son ortogonales entre sí.

También, $\underline{u}^T \underline{u} + \underline{v}^T \underline{v} = 1$; $\underline{u}^T \underline{u} - \underline{v}^T \underline{v} = 1$. Entonces, $\|\underline{u} + i\underline{v}\| = 1$; $2\underline{u}^T \underline{u} = 1$; $2\underline{v}^T \underline{v} = 1$. Luego: $\|\underline{u}\| = \|\underline{v}\| = \sqrt{\frac{1}{2}}$





En el plano $\perp$ a $\underline{n}$

Además:

$$\underline{\underline{\Lambda}}\left(\underline{u}+i\underline{v}\right)=e^{i\phi}\left(\underline{u}+i\underline{v}\right)$$

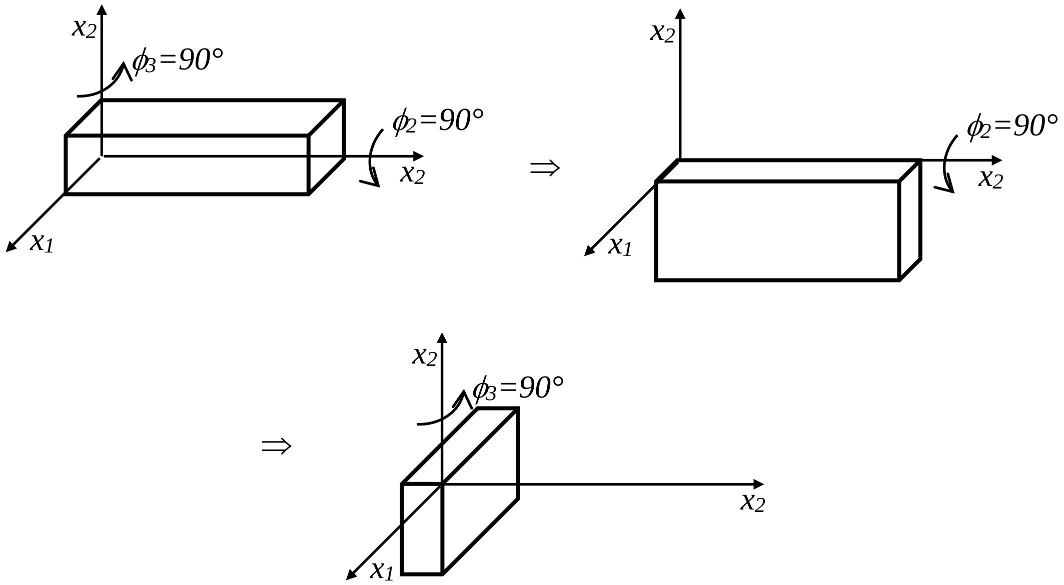
$$\underline{\underline{\Lambda}}\left(\underline{u}-i\underline{v}\right)=e^{-i\phi}\left(\underline{u}-i\underline{v}\right)$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Lambda}}\underline{u}+i\underline{\underline{\Lambda}}\underline{v}&=\left(\underline{u}\cos\phi-\underline{v}\sin\phi\right)+i\left(\underline{u}\sin\phi+\underline{v}\cos\phi\right)\\ \underline{\underline{\Lambda}}\underline{u}-i\underline{\underline{\Lambda}}\underline{v}&=\left(\underline{u}\cos\phi-\underline{v}\sin\phi\right)-i\left(\underline{u}\sin\phi+\underline{v}\cos\phi\right)\end{aligned}\qquad \therefore\begin{cases}\underline{\underline{\Lambda}}\underline{u}=\underline{u}\cos\phi-\underline{v}\sin\phi\\ \underline{\underline{\Lambda}}\underline{v}=\underline{u}\sin\phi+\underline{v}\cos\phi\\ \underline{\underline{\Lambda}}\underline{n}=\underline{n}\end{cases}\qquad \textit{(250)}$$

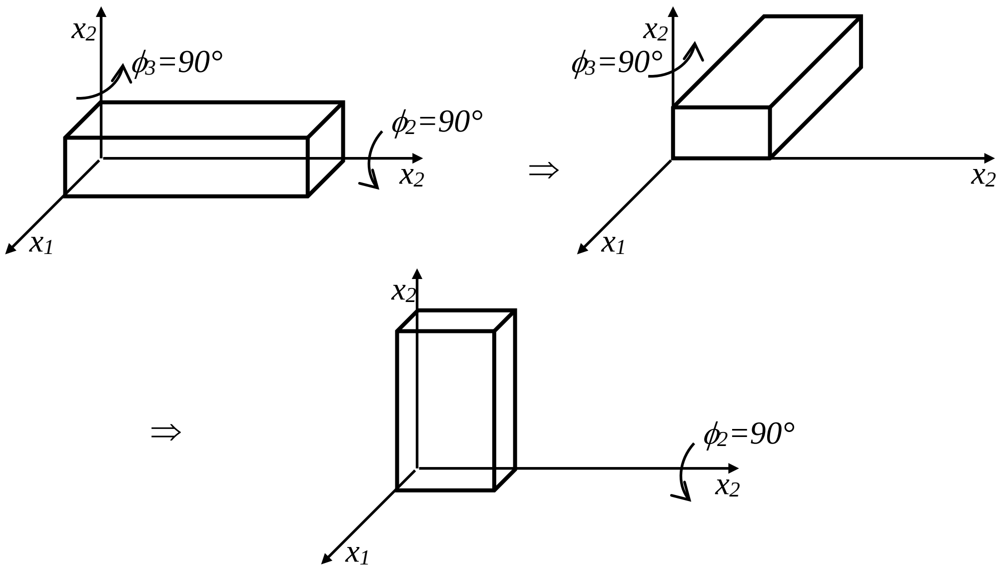
Podemos poner $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{n}$ con módulo unitario, y así formar una base. Estos vectores $\underline{v}$, $\underline{u}$, $\underline{n}$ forman un triedro derecho. El vector $\underline{n}$ determina el signo de ϕ. La proyección de $\underline{R}$ sobre $\underline{n}$ no varía, sólo rota la proyección normal a $\underline{n}$.[3]

Estas rotaciones no son conmutativas. Por ejemplo, si al cuerpo de la figura se lo somete a dos rotaciones consectivas aplicadas en distinto orden, será:

[3] Teorema de Euler



Si se invierte el orden de las rotaciones, será:



Luego: $\underline{\underline{\Lambda}}_2 \underline{\underline{\Lambda}}_3 \neq \underline{\underline{\Lambda}}_3 \underline{\underline{\Lambda}}_2$

Sólo son conmutativas las rotaciones infinitesimales.

Notar que $\underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow$ existen seis relaciones de restricción.

Si escribimos: $\underline{\underline{\Lambda}} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$; $\underline{v}_i^T, \underline{v}_j = \delta_{ij}$; $\begin{cases} i = 1, j \\ j = 1,3 \end{cases}$

$\therefore \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Rightarrow \underline{\underline{\Lambda}}$ es a lo sumo función de 3 parámetros independientes

Por lo tanto, una rotación implica 3 GL.

La rotación puede expresarse de distintas formas, a saber:

(i) Producto externo de los vectores de base

$$\boxed{\underline{\underline{\Lambda}} = \sum_i \underline{e}_i \underline{E}_i^T} \qquad (251)$$

$\therefore \quad \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{v} = \sum_i \underline{e}_i \underbrace{\underline{E}_i^T \underline{v}}_{v_i} = \underline{v}'$ donde $\underline{v}$' es el vector rotado.

(ii) Cosenos directores

Si tenemos $\underline{r} = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{R} = \sum_j r_j \underline{E}_j = \sum_j R_j \underline{e}_j \quad \Rightarrow \quad r_i = \underline{E}_i \cdot \underline{r} \quad \Rightarrow \quad r_i = \sum_j \underbrace{\underline{E}_i^T \underline{e}_j}_{\Lambda_{ij}} R_j$

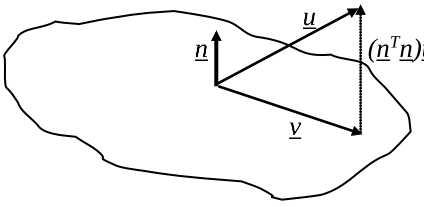
Luego:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{E}_i^T \underline{e}_j \begin{bmatrix} \underline{E}_1^T \underline{e}_1 & \underline{E}_1^T \underline{e}_2 & \underline{E}_1^T \underline{e}_3 \\ \underline{E}_2^T \underline{e}_1 & \underline{E}_2^T \underline{e}_2 & \underline{E}_2^T \underline{e}_3 \\ \underline{E}_3^T \underline{e}_1 & \underline{E}_3^T \underline{e}_2 & \underline{E}_3^T \underline{e}_3 \end{bmatrix} \quad \textit{matriz de cosenos directores} \qquad (252)$$

La matriz de cosenos directores no es simétrica, y los elementos diagonales no son 1.

(iii) Expresiones en términos de invariantes lineales

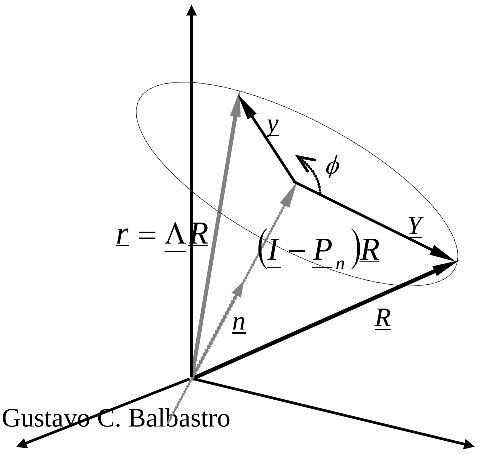
Notar que $\underline{n}$ es unitario, luego $\underline{\underline{P}}_n \triangleq \underline{\underline{I}} - \underline{n}\,\underline{n}^T$ es un operador de proyección sobre el plano normal a $\underline{n}$



$\therefore \quad \underline{\underline{P}}_n \cdot \underline{u} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{n}\,\underline{n}^T\right)\underline{u} = \underline{u} - \left(\underline{n}^T \underline{u}\right)\underline{n} = \underline{v}$

$\underline{v}$ está contenido en el plano

Usamos $\underline{\underline{P}}_n$ para descomponer $\underline{R}$ y $\underline{r}$ en componentes $\|\underline{n}$ y $\perp \underline{n}$.



$$\underline{R} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)\underline{R} + \underbrace{\underline{\underline{P}}_n \underline{R}}_{\underline{Y}} \qquad (252)$$

$$\underline{r} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)\underline{r} + \underbrace{\underline{\underline{P}}_n \underline{r}}_{\underline{y}} \qquad (253)$$

Notar que $\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{n}\,\underline{n}^T \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{n}\,\underline{n}^T = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)$

Luego:

$$\underline{r} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)\underbrace{\underline{r}}_{\underline{\underline{\Lambda}}\underline{R}} + \underbrace{\underline{\underline{P}}_n \underline{r}}_{\underline{y}} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)\underline{R} + \underbrace{\underline{\underline{P}}_n \underline{r}}_{\underline{y}} \tag{254}$$

Por lo tanto, ambos vectores tienen la misma componente $\parallel \underline{n}$. En el plano $\perp \underline{n}$ será:

$$\left\|\underline{Y}\right\| = \left\|\underline{y}\right\| \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Y} \times \underline{y} = \left\|\underline{Y}\right\| \cdot \left\|\underline{y}\right\| \cdot \underline{n} \sin\phi = \left\|\underline{Y}\right\|^2 \cdot \underline{n} \sin\phi \tag{255}$$

$$\underline{Y}^T \cdot \underline{y} = \left\|\underline{Y}\right\| \cdot \left\|\underline{y}\right\| \cdot \cos\phi = \left\|\underline{Y}\right\|^2 \cdot \cos\phi \tag{256}$$

Definimos un operador $\underline{\underline{\tilde{Y}}}$ tal que:

$$\underline{\underline{\tilde{Y}}} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & Y_3 & -Y_2 \\ -Y_3 & 0 & Y_1 \\ Y_2 & -Y_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{257}$$

La matriz $\underline{\underline{\tilde{Y}}}$ es antisimétrica (*skew)*, singular. Luego:

$$\underline{Y} \times \underline{y} = \underline{\underline{\tilde{Y}}} \cdot \underline{y} \tag{258}$$

Luego, las expresiones (255) y (256) constituyen un sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{Y}}} \\ \underline{Y}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{y} = \left\|\underline{Y}\right\|^2 \begin{Bmatrix} \underline{n} \sin\phi \\ \cos\phi \end{Bmatrix}} \tag{259}$$

El sistema de la (259) es de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, pero la matriz es de rango 3, por lo que su solución única es:

$$\underline{y} = \left[\underline{\underline{\tilde{n}}} \sin\phi + \left(\underline{\underline{I}} - \underline{n}\,\underline{n}^T\right)\cos\phi\right]\underline{R} \tag{260}$$

$$\underline{r} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_n\right)\underline{R} + \underline{y} = \left[\underbrace{\underline{\underline{I}} \cos\phi + (1 - \cos\phi)\underline{n}\,\underline{n}^T + \underline{\underline{\tilde{n}}} \sin\phi}_{\underline{\underline{\Lambda}}\ \mathit{función\, de}\,(\underline{n},\phi)}\right]_{3\times3} \cdot \underline{R} \tag{261}$$

Entonces, $\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{n},\phi)$ es la rotación de ángulo ϕ en torno a $\underline{n}$. El operador $\underline{\underline{\tilde{n}}}$ será:

$$\underline{\underline{\tilde{n}}} = \underline{\underline{\tilde{Y}}}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (262)$$

Profesor: Dr. Alberto Cardona

Bibliografía:

Mechanics. 3rd ed. L. Landau, E. Lifchitz, Pergamon
Classical Mechanics. Goldstein, Addison – Wesley
Flexible Multibody Dynamics