4 Oscilaciones de pequeña amplitud

4.1 *Oscilaciones libres en una dimensión*

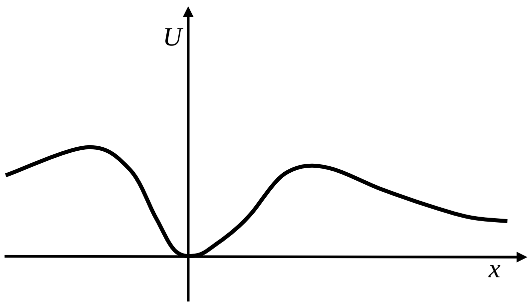
Resulta un problema común en la mecánica el estudio de las oscilaciones libres de pequeña amplitud, en torno a una posición de equilibrio estable. El caso más simple es el de un sistema de 1 GDL.

El lagrangiano del sistema será en general $L = K - U$. El equilibrio estable corresponde a la posición en que es $U_{mín}$. En este punto será $\frac{\partial U}{\partial q} = 0$. Al alejarse de este punto, aparecerá una fuerza $\underline{F} = -\frac{dU}{dq}$ que tiende a retornar al sistema a su posición de equilibrio. Al tratarse de oscilaciones pequeñas, podremos expandir la diferencia de $U(q)$-$U(q_0)$ en potencias de $(q-q_0)$, reteniendo sólo el primer término no decreciente. En general:

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{1}{2}k(q - q_0)^2 \tag{113}$$

Donde k es un coeficiente positivo: $k = \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0}$

Trasladamos el potencial fijando $U(q_0)=0$, y llamaremos $x=(q-q_0)$ a la desviación de la coordenada desde el punto de equilibrio.



La energía potencial será:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{114}$$

y la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2 \tag{115}$$

Para pequeñas amplitudes se puede aproximar: $K \cong \frac{1}{2}\underbrace{a(q_0)}_{\triangleq m}\dot{x}^2$ *(116)*

En la (116), m será masa solamente si q es una coordenada cartesiana. Si no, será una masa generalizada. Por lo tanto el lagrangiano del sistema que ejecuta pequeñas oscilaciones en una dimensión será:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{117}$$

La ecuación del movimiento será $m\ddot{x} + kx = 0$ *(118)*

o bien $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, donde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *(119)*

Esta tiene dos soluciones independientes que se combinan en una solución general de la forma:

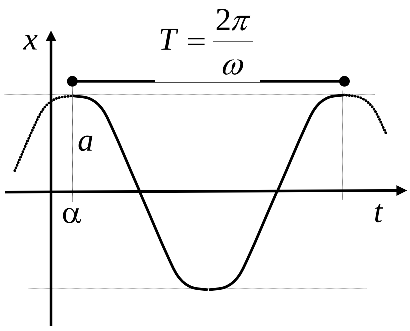
$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (120)$$

o bien:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) \qquad (121)$$

Donde:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad ; \quad \tan \alpha = \frac{-C_2}{C_1}$$



α: valor inicial de la fase

$$f = \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{ciclos}{u.t}\right]$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) \qquad (121)$$

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha) \\ x^2 &= a^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 = -a^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) \end{aligned} \qquad (122)$$

$$E = \frac{m}{2}\left[a^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + a^2 \cos^2(\omega t + \alpha)\right] = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \qquad (123)$$

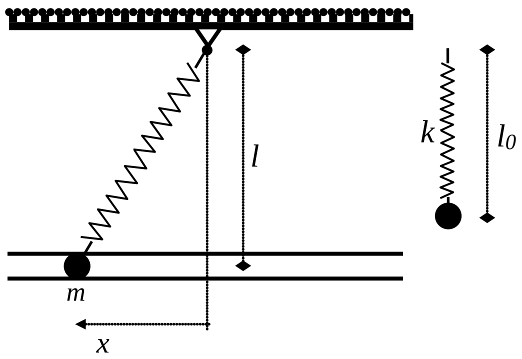
$$\boxed{\therefore \quad E \propto a^2} \qquad (124)$$

La energía entonces es proporcional al cuadrado de la amplitud. La relación entre la coordenada y el tiempo puede expresarse también como la parte real de la exponencial compleja:

$$x = re\left[Ae^{(i\omega t)}\right] \qquad (125)$$

donde A es una constante compleja: $A = ae^{(i\omega t)}$

Ejemplo: Un resorte pretensionado vinculado a una corredera.



Debido a la pretensión, en su posición central el resorte ejerce una fuerza $\underline{F}$. Además l_0 es la longitud del resorte en reposo.

$$U = \frac{1}{2}k\left(l_F - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{l^2+x^2} - l_0\right)^2 = \frac{k}{2}\left(l^2 + x^2 - 2l_0\sqrt{l^2+x^2} + l_0^2\right) \qquad (126)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{2}\left(2x - \frac{2l_0\,2x}{2\sqrt{l^2+x^2}}\right) = kx\left(1 - \frac{2l_0}{2\sqrt{l^2+x^2}}\right) \qquad (127)$$

Luego, existirán dos soluciones para $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$:

1) $x=0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

2) $\left(1 - \frac{2l_0}{2\sqrt{l^2+x^2}}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{l^2+x^2} = l_0$

Para determinar si el equilibrio es estable:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{k\left(l-l_0\right)}{l} > 0 \qquad (128)$$

si $l>l_0 \Rightarrow$ equilibrio estable.

4.2 Oscilaciones forzadas

Consideraremos ahora el caso de oscilaciones de un sistema sobre el cual actúa una fuerza externa variable. Estas se denominan *oscilaciones forzadas*. Se entiende que el campo externo variable es lo suficientemente suave como para no provocar grandes amplitudes de oscilación.

El sistema tendrá además de la energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$, una energía potencial adicional $U_e(x,t)$ proveniente del campo externo. Este término adiciona puede expandirse en serie de potencias de x.

$$U_e(x,t) \cong U_e(0,t) + x\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad (129)$$

En (129) $U_e(0,t)$ sólo depende de t, por lo que se elimina del lagrangiano.

Por su parte, $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}$ es una *"fuerza"* externa actuando sobre el sistema en su posición de equilibrio, y es una función del tiempo $F(t)$. Por lo tanto, el lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t) \qquad \textit{(130)}$$

La ecuación del movimiento será:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad \textit{(131)}$$

La solución general $x(t)$ de la (131) se compone de una solución homogénea $x_0(t)$ y de una particular $x_1(t)$.

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \qquad \textit{(132)}$$

La parte homogénea $x_0(t)$ corresponde a las oscilaciones libres ya estudiadas.

Consideraremos un caso de especial importancia:

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta) \qquad \textit{(133)}$$

La solución particular será:

$$x_1(t) = b\cos(\gamma t + \beta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -b\gamma^2\cos(\gamma t + \beta) \qquad \textit{(134)}$$

Reemplazando en (131):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \left(-b\gamma^2 + b\omega^2\right)\cos(\gamma t + \beta) = \frac{f\cos(\gamma t + \beta)}{m} \qquad \textit{(135)}$$

$$\therefore \quad b = \frac{f}{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)m} \qquad \textit{(136)}$$

La solución general será:

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)m}\cos(\gamma t + \beta)} \qquad \textit{(137)}$$

En la (137), si γ = ω la solución no es válida, produciéndose el fenómeno conocido como *resonancia*.

Para resolver este problema, reescribiremos la (137) de otra forma:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \left[\frac{f}{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)m}\right]\left[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\right] \qquad \textit{(138)}$$

Notar que ahora la constante a es distinta a la de la (137). Cuando $\gamma \to \omega$ el segundo término tiende a $\frac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve por la regla de L´Hospital:

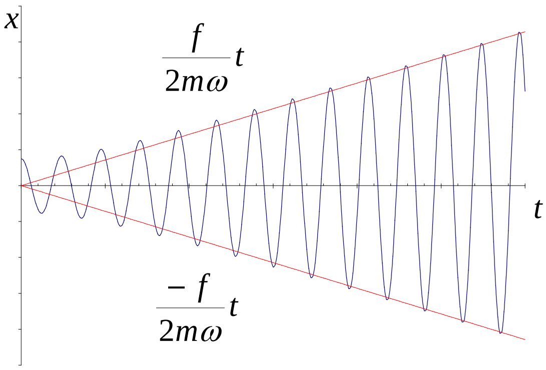
$$\lim_{\gamma \to \omega} \left\{ \left[\frac{f}{(\omega^2 - \gamma^2) m} \right] [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \right\} = \frac{f \sin(\omega t + \beta)}{2m\omega} t \qquad (139)$$

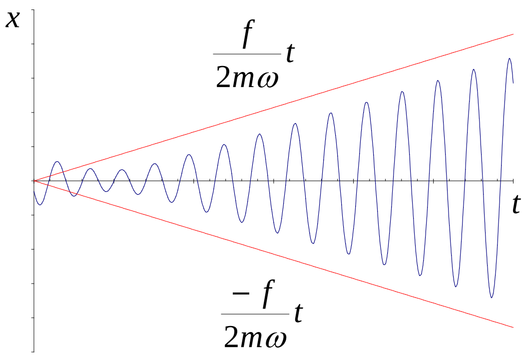
$$\therefore \qquad \boxed{x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + \left[\frac{f}{2m\omega} \right] \cdot t \cdot \sin(\omega t + \beta)} \qquad (140)$$

La ecuación (140) representa la respuesta del sistema en resonancia. Se ve que la amplitud de la oscilación crece con el tiempo, al menos dentro del campo de las oscilaciones pequeñas.

En las figuras siguientes se observan las curvas de respuesta para el mismo sistema, con distinto ángulo de fase.

Se observa la respuesta en oscilaciones libres al principio del diagrama, la que va perdiendo importancia frente a la respuesta en régimen a medida que avanza el tiempo.





Otro caso de importancia es cuando $\gamma \approx \omega$. En este caso de *"casi resonancia"*, siendo:

$$\gamma = \omega + \varepsilon \qquad ; \qquad \varepsilon << \omega$$

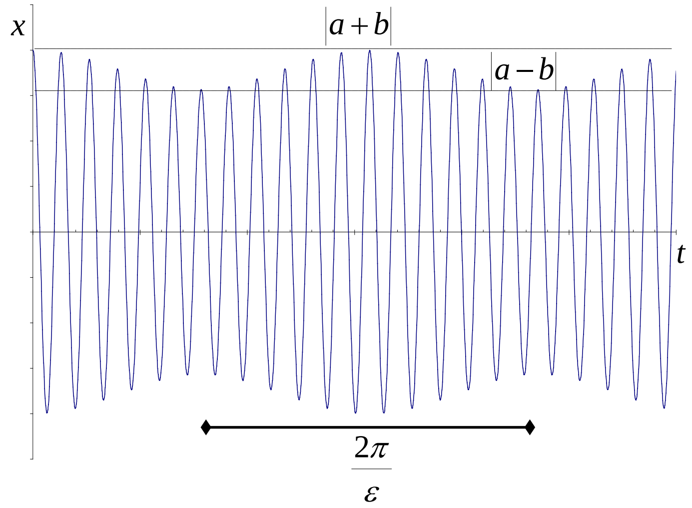
Podemos escribir la solución general en forma compleja:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega + \varepsilon)t} = \left[A + Be^{i\varepsilon t} \right] e^{i\omega t} \qquad (141)$$

Donde $A \wedge B \in \boldsymbol{C}$. El término entre corchetes de la (141) varía muy poco en el período $2\pi/\omega$.

La amplitud o módulo de este movimiento será: $C = \left| A + Be^{i\varepsilon t} \right|$, donde $A \triangleq a \cdot e^{i\alpha}$; $B \triangleq b \cdot e^{i\beta}$.

$$\therefore \quad C^2 = \left| a \cdot e^{i\alpha} + b \cdot e^{i(\beta + \varepsilon t)} \right| = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha) \qquad (142)$$



El factor $\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha)$ varía de entre +1 y –1, por lo que C varía entre $|a+b|$ y $|a-b|$.

Por lo tanto, el movimiento será una oscilación de amplitud variable. Esta amplitud varía con frecuencia ε.

4.3 Vibraciones forzadas. Excitación arbitraria

Consideraremos ahora el caso de una excitación que sigue una ley de variación arbitraria. La ecuación del movimiento, según vimos en (131) es:

$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$ donde $F(t)$ es arbitraria.

Reescribimos la ecuación sumando $i\omega\dot{x} - i\omega\dot{x}$. Entonces:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{F(t)}{m} \qquad (143)$$

Llamando: $\xi \triangleq (\dot{x} + i\omega x)$

Podemos transformar la (143) en una ecuación de primer orden:

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{F(t)}{m} \qquad (144)$$

La solución homogénea de la (144) es: $\xi = A_0 e^{i\omega t}$ con A_0 constante. La solución particular será: $\xi = A(t)e^{i\omega t}$

$$\therefore \quad \xi = \dot{A}(t)e^{i\omega t} + A(t)ie^{i\omega t}$$

Reemplazando en (144): $\dot{\xi} - i\omega\xi = \dot{A}(t)e^{i\omega t} = \dfrac{F(t)}{m}$

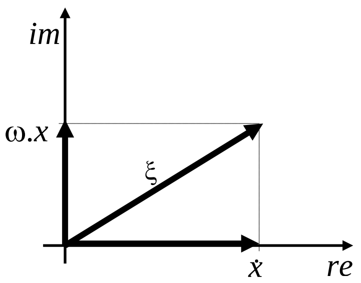
$$\therefore \quad \dot{A}(t) = \frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t} \qquad \Rightarrow \qquad A(t) = \int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \textit{(145)}$$

La (145) es la expresión de la *transformada de Fourier*. Luego:

$$\boxed{\xi(t) = e^{i\omega t}\left[A_0 + \int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}dt\right]} \qquad \textit{(146)}$$

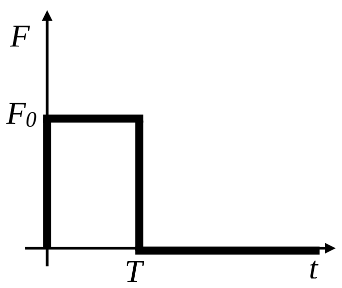
Donde: $A_0 = \xi(0) = \dot{x}_0 + i\omega x_0$

$$x(t) = \frac{im(\xi)}{\omega} \quad ; \quad \dot{x}(t) = re(\xi) \qquad \textit{(147)}$$



Como se ve en la figura, la (147) representa las coordenadas de ξ en el plano de fases, con el eje imaginario deformado por ω.

Ejemplo: Determinar la amplitud final de las vibraciones de un sistema como el de la figura, cuyas condiciones iniciales $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ son sometido a una fuerza como la de la figura.



Para $t>T$ el sistema tendrá oscilaciones libres alrededor de $x=0$, siendo sus condiciones iniciales las condiciones finales en T.

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\left[\frac{F_0}{m}\int_0^T e^{-i\omega t}dt\right] = -\frac{e^{i\omega T}F_0}{m}\left[\frac{1-e^{-i\omega T}}{\omega}\right]$$

$$\xi(t) = -\frac{iF_0}{m\omega}\left[e^{i\omega T} - 1\right] = -\frac{iF_0}{m\omega}\left[\omega T + i\sin\omega T - 1\right]$$

Luego:

$$re(\xi(T)) = \dot{x}(T) = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega T \qquad ; \qquad im(\xi(T)) = x(T) = -\frac{F_0}{m\omega^2}\left[\cos\omega T - 1\right]$$

La energía del sistema será:

$$E = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \left(\frac{F_0}{m\omega}\right)^2 \sin^2 \omega T + \left(\frac{F_0}{m\omega}\right)^2 \left[\cos^2 \omega T - 2\cos \omega T + 1\right] = \left[1 - \cos \omega T\right]\left(\frac{2F_0}{m\omega}\right)^2$$

$$\therefore \quad E_T^2 = a^2 \omega^2$$