MECÁNICA RACIONAL

Prof: Dr. Alberto Cardona

INTEC – 2002

1 Ecuaciones del movimiento

1.1 Coordenadas generalizadas

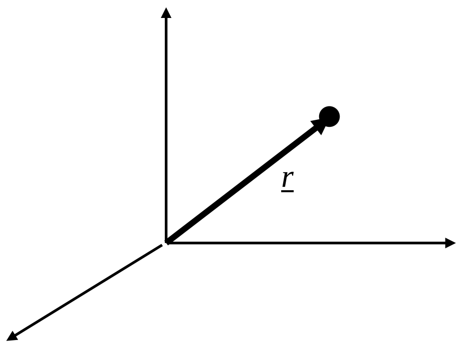
Definición:

Partícula: Cuerpo cuyas dimensiones pueden ignorarse al describir su movimiento

Por ejemplo, un planeta con respecto al Sol, puede considerarse como una partícula. Si en cambio tenemos en cuenta su rotación, no podemos considerarlo como una partícula.

$$\underline{v} \mathrel{\hat{=}} \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\underline{a} \mathrel{\hat{=}} \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$$



El vector posición $\underline{r}$ en el espacio se define con 3 coordenadas, por lo tanto, para definir la posición de N partículas se necesitarán $3N$ coordenadas.

Definición:

Grado de libertad: cantidad de parámetros linealmente independientes necesarios para definir en forma única la configuración de un sistema.

Estos parámetros o números no necesariamente deben ser coordenadas cartesianas.

Definición:

Coordenadas generalizadas: Cualquier conjunto de S cantidades $q_1, q_2, \ldots, q_s$ que definen completamente un sistema de S GL.

Si las partículas están sobre una superficie, por ejemplo un paraboloide, podemos referirlas a las coordenadas x,y de sus proyecciones en el plano, porque la ecuación del paraboloide es conocida.

$$q_i \mathrel{\hat{=}} \frac{dq_i}{dt}$$ Velocidades generalizadas

Para definir completamente el estado mecánico de un sistema necesitamos más información, además de su configuración. Por experiencia se sabe que especificando posiciones y velocidades en un instante $t \longrightarrow \underline{q}, \dot{\underline{q}}$, el estado del sistema está determinado y se puede conocer el movimiento posterior.

Existen relaciones entre $\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \ddot{\underline{q}}$, que se denominan *ecuaciones del movimiento*. Estas son ecuaciones diferenciales ordinarias de 2do orden.

1.2 Principio de Hamilton o de mínima acción

"Todo sistema mecánico está caracterizado por una función $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ y el movimiento es tal que debe verificar una cierta condición sobre L."

Es la forma más general de las ecuaciones del movimiento.

Sea un sistema tal que en t_1 ocupa $\underline{q}^{(1)}$, en t_2 ocupa $\underline{q}^{(2)}$

$\therefore \quad S = \int_{t1}^{t2} L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)dt$ toma un valor mínimo. S se denomina *acción.*

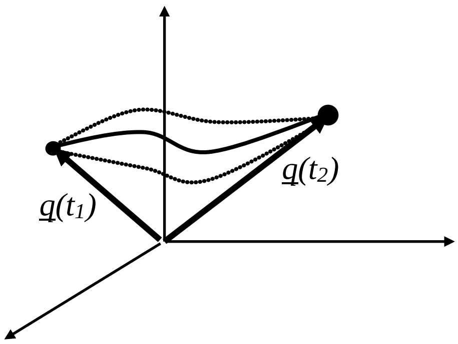
Notar que L es función de $\underline{q}$ y $\dot{\underline{q}}$, no de $\ddot{\underline{q}}$, porque L depende del estado.

Sea $\underline{q} = \underline{q}(t)$ tal que minimiza S

$\Rightarrow \qquad \underline{q}(t)+\delta\underline{q}(t) \qquad \Rightarrow \qquad S$ aumenta

$\delta\underline{q}(t)$ es una *variación* de las coordenadas generalizadas.

Notar que $\delta\underline{q}(t_1) = \delta\underline{q}(t_2) = 0$ porque $\underline{q}(t_1)$ y $\underline{q}(t_2)$ son conocidos.



$$\therefore \quad S(q+\delta q) - S(q) = \int_{t1}^{t2} L(\underline{q}+\delta q, \dot{\underline{q}}+\delta\dot{q}, t)dt - \int_{t1}^{t2} L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)dt \qquad (1)$$

El primer integrando puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$L(\underline{q}+\delta q, \dot{\underline{q}}+\delta\dot{q}, t) = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \ldots$$

Luego, en (1):

$$\delta S = \int_{t1}^{t2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \ldots dt$$

despreciando los términos superiores del desarrollo e integrando por partes el segundo término,

$$\delta S = \int_{t1}^{t2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t1}^{t2} = 0$$

donde $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t1}^{t2} = 0$ porque $\delta q = 0$ en los extremos

$$\therefore \delta S = \int_{t1}^{t2} \left(\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q \right) dt = 0$$

dado que:

1°) t_1 y t_2 son arbitrarios $\Rightarrow$ integrando = 0

2°) δq es arbitrario $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0}$ *(2)*

La expresión (2) se denomina *ecuaciones del movimiento* o *ecuaciones de Lagrange*, donde L es una función del estado mecánico del sistema.

Notar que si $L'(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$

entonces $S' = \int_{t1}^{t2} L'\, dt = \int_{t1}^{t2} L\, dt + \int_{t1}^{t2} \frac{df}{dt}\, dt = S + \underbrace{f\left(q^{(2)}, t_2\right) - f\left(q^{(1)}, t_1\right)}_{\delta[\ ]=0}$

$\therefore \delta S' = \delta S \Rightarrow L'$ da las mismas ecuaciones del movimiento que L

o sea que el lagrangiano está indeterminado respecto de una derivada temporal total de una función arbitraria de coordenadas y tiempos.

1.3 Principio de relatividad de Galileo

Para describir un fenómeno mecánico necesitamos un marco de referencia. Si cambiamos dicho marco, las leyes del movimiento también cambian. Por lo tanto, se deben elegir marcos de referencia que hagan que las leyes de movimiento tengan la forma más simple posible.

Para esto debe haber *homogeneidad e isotropía* en la descripción del espacio y *homogeneidad* del tiempo.

Definición:

Marco inercial: es un marco de referencia en el cual el espacio es homogéneo e isótropo, y el tiempo es homogéneo. En particular, en un MI un cuerpo libre en reposo permanece siempre en reposo.

Analizamos una partícula libre moviéndose en un MI. Por la homogeneidad del espacio y del tiempo, L no puede ser función explícita del tiempo ni de la posición.

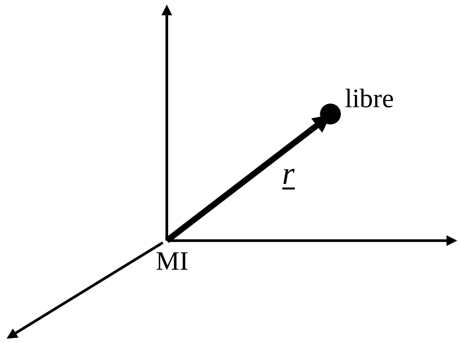
Luego, para una partícula libre se verifica $L = L(\underline{q})$. En realidad, $L = L(\|\underline{q}\|)$ o bien $L = L(\underline{v}^2)$

Dado que L es independiente de q $\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) = 0$ *(3)*

Siendo $\underline{r} \equiv \underline{q} \quad \wedge \quad \underline{v} \equiv \dot{\underline{q}} \quad \therefore \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = cte$

Como L es función sólo de v $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{v} = \text{cte}}$ *(4)*

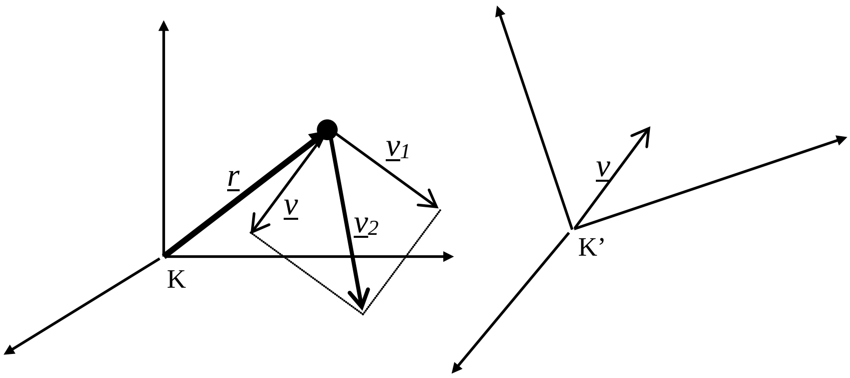
Por lo tanto, en un MI todo movimiento libre tiene lugar con velocidad constante en magnitud y dirección. Es lo que se conoce como *ley de inercia.*



$$\frac{\partial L}{\partial \underline{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{v}}\right)}_{cte} = 0 \qquad (5)$$

Un marco que rota no es inercial, porque una partícula libre no permanece en reposo con respecto a éste.

Si tenemos una partícula que se mueve con respecto a un MI, y consideramos un segundo MI que se mueve sobre una recta con velocidad uniforme $\underline{v}$ con



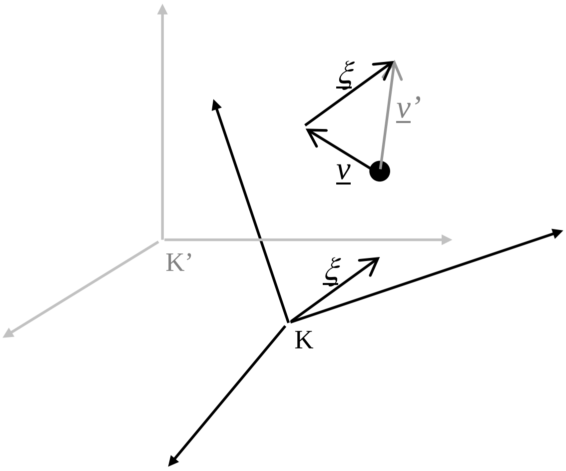
respecto al primero, la velocidad de la partícula en el segundo MI será $\underline{v}_1 - \underline{v} = \underline{v}_2$

$\underline{v}_1 = cte \quad \wedge \quad \underline{v} = cte \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_2 = cte$

Consideramos marcos que se mueven con velocidad constante, en forma rectilínea. En todos ellos, el movimiento libre se desarrolla a velocidad constante. La experiencia demuestra que las leyes del movimiento libre son las mismas, en realidad son completamente equivalentes mecánicamente.

1.4 Lagrangiano de la partícula libre

Sean dos MI, tal que K se mueve con velocidad relativa infinitesimal $\underline{\xi}$ con respecto a K'. En ambos marcos, las leyes del movimiento de una partícula deben ser las mismas.



$\underline{v}' = \underline{v} + \underline{\xi}$

$L(\underline{v}^2) \longrightarrow L'$ difiere a lo sumo en la derivada temporal de una *f*($\underline{r}$, $\underline{t}$)

$$L' = L(\underline{v}'^2) = L(\underline{v}^2 + 2\underline{v}\underline{\xi} + \underline{\xi}^2)$$

$$L(\underline{v}'^2) = L(\underline{v}^2) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \underline{v}^2} 2\underline{v}\cdot\underline{\xi}}_{\frac{d}{dt}\left(L(v,t)\right)} + \ldots$$

debe ser lineal en $\underline{v}$

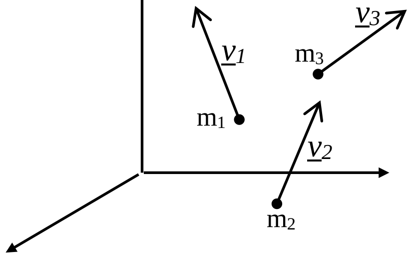
$$\frac{d}{dt} f(\underline{r},t) = \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{v}^2}\right)}_{cte \triangleq \frac{m}{2}} 2\underline{v}\cdot\underline{\xi} \quad \therefore \quad \boxed{L = \frac{1}{2} m\underline{v}^2} \quad (6)$$

Lagrangiano de la partícula libre

Si $\underline{\xi}$ no es infinitesimal, sino que es $\underline{\xi} = \underline{V}$

$$\therefore L' = \frac{1}{2} m\underline{v}'^2 = \frac{1}{2} m\left(\underline{v} + \underline{V}\right)^2 = \frac{1}{2} m\underline{v}^2 + m\underline{v}\cdot\underline{V} + \frac{1}{2} m\underline{V}^2 = L + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m\underline{r}\cdot\underline{V} + \frac{1}{2} m\underline{V}^2 t\right)}_{\frac{d}{dt}\left(f(\underline{r},t)\right)} \quad (7)$$

La constante m se denomina *masa de la partícula*. Si tenemos varias partículas que no interactúan, siguiendo el mismo razonamiento será:



$$\boxed{\therefore L = \sum_a \frac{1}{2} m_a \underline{v}'^2_a} \quad (8)$$

Como $\frac{\partial L}{\partial \underline{v}^2} = cte$ podemos multiplicar el lagrangiano por una constante, lo que equivale a cambiar las unidades de masa. La relación entre las masas de las partículas no cambia, por lo que la masa *es una propiedad física*.

La masa de la partícula no puede ser negativa, porque $S=\int_{t1}^{t2} L\,dt=\int_{t1}^{t2}\frac{1}{2}m\underline{v}^2dt$ y S debe ser un mínimo según el principio de Hamilton.

Si existe interacción, las leyes se aplican a un *sistema cerrado*, porque las partículas interactúan entre sí pero no con otros sistemas.

$$\therefore \qquad \boxed{L=\sum_a \underbrace{\frac{1}{2}m_a\underline{v}'^2_a}_{T\,:\,energía\ cinética} - \overbrace{U(\underline{r}_1,\underline{r}_2,...)}^{energía\ potencial}} \qquad (9)$$

La energía potencial U del sistema depende de la naturaleza de la interacción (por ejemplo, gravitatoria, electrostática, elástica, etc.) y es función de las coordenadas.

Si una partícula cambia de posición, afecta a todas las otras, ya que en nuestro campo de estudio se considera que las interacciones se propagan instantáneamente. Si esto no fuera así, es decir que la propagación de la interacción demandara un tiempo finito, la naturaleza de la interacción cambiaría al cambiar el marco de referencia.

Si reemplazamos t por $-t$, el lagrangiano no cambia. Si el movimiento es posible en una dirección, también lo es en la dirección contraria. Es lo que se denomina *reversibilidad del movimiento* en mecánica clásica.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a}\right)=\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} \quad \therefore \quad \boxed{m_a\frac{d\underline{v}_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a}=F_a} \qquad \textit{(10) Ecuación de Newton}$$

F_a se denomina fuerza. El subíndice a varía de 1 a N, siendo N la cantidad de partículas del sistema.

F_a es función de las coordenadas de todas las partículas y no depende de las velocidades, por lo tanto, las aceleraciones son función de las coordenadas.

Normalmente, se puede sumar una constante a U sin afectar las leyes del movimiento. Se fija esta constante haciendo que $U\to 0$ cuando $|\underline{r}_i-\underline{r}_j|\to\infty$.

Si trabajamos en coordenadas generalizadas:

$$x_a = f_a(q_1,q_2,....,q_s) \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_a=\sum\frac{\partial f_a}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_k \qquad (11)$$

sustituyendo:

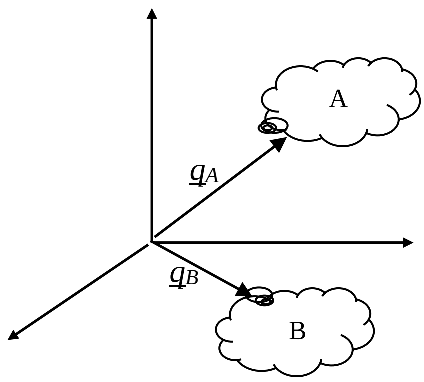
$$L = \frac{1}{2} m_a \left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2 \right) - U$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1,s} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q) \qquad (12)$$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = [\nabla f] \{ \underline{\dot{q}} \} \quad (13) \qquad T = \frac{1}{2} \underline{\dot{x}}^T \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{x}} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T [\nabla f]^T [m] [\nabla f] \underline{\dot{q}} \; \underline{a}(q) \quad (14)$$

Al trabajar en coordenadas generalizadas la energía cinética puede depender de las coordenadas.

Supongamos dos sistemas A y B. El sistema B está determinado, es decir que $q_B, \dot{q}_B$ son conocidas.



Planteando el principio de mínima acción para el conjunto $A+B$ y asumiendo que $A+B$ es cerrado:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B) \qquad (15)$$

Sustituyendo q_B por un valor conocido $q_B(t)$, que no dependa de A

Luego, $L = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, t) + f(t)$ define el movimiento en un campo externo.

1.5 Partícula simple en un campo externo

El lagrangiano de la partícula será:

$$L = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 - U(\underline{r}, t) \qquad (16)$$

y su ecuación de movimiento: $$m \underline{\dot{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \qquad (17)$$

Definición:

Un campo tal que la misma fuerza $\underline{F}$ actúa en todo punto sobre una partícula se denomina *uniforme.*

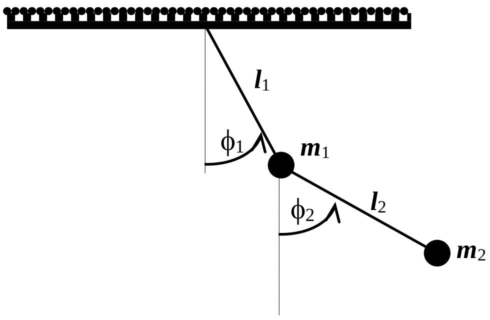
$$-\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} = \underline{F} \quad \Rightarrow \boxed{U = -\underline{F} \cdot \underline{r}} \qquad (18)$$

En ocasiones, la interacción entre partículas toma la forma de restricciones al movimiento relativo. Aparecen efectos hasta ahora no tenidos en cuenta, tales como fricción, etc. Si ignoramos la fricción, si la masa de los elementos vinculantes puede despreciarse, entonces puede expresarse el sistema en coordenadas generalizadas en el espacio en que puede moverse:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(\underline{r},t) \qquad \textit{(19)}$$

Donde el número de coordenadas independientes es igual a *3N* menos el número de restricciones.

Ejemplo: péndulo doble coplanar



Buscamos un sistema de coordenadas que describa el espacio de configuraciones del péndulo.

#coord. indep.= 2x2-2 = 2

Las restricciones deben también ser independientes.

Siendo:

$$\underline{r}_1 = l_1\begin{Bmatrix} \sin\phi_1 \\ -\cos\phi_1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \dot{\underline{r}}_1 = l_1\begin{Bmatrix} \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 \end{Bmatrix}\dot{\phi}_1 \quad \therefore$$

$$v_1^2 = \dot{\underline{r}}_1^{\,T}\cdot\dot{\underline{r}}_1 = l_1^2\dot{\phi}_1^2$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + l_2\begin{Bmatrix} \sin\phi_2 \\ -\cos\phi_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \dot{\underline{r}}_2 = \dot{\underline{r}}_1 + l_2\begin{Bmatrix} \cos\phi_2 \\ \sin\phi_2 \end{Bmatrix}\dot{\phi}_2 \quad \therefore$$

$$v_2^2 = \dot{\underline{r}}_2^{\,T}\cdot\dot{\underline{r}}_2 =$$

$$= l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2\left(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 = l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2\left(\cos(\phi_1-\phi)\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$$

se podrá escribir:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\underline{v}_1^2 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\phi}_1^2 \quad ; \quad U_1 = -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1\cos\phi_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2\left(\cos(\phi_1-\phi)\right)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right) \quad ; \quad U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g\left(l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2\right)$$

$$\underline{\underline{a}}(\phi) = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2\cos(\phi_1-\phi_2) \\ m_2 l_1 l_2\cos(\phi_1-\phi_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

La matriz $\underline{\underline{a}}$ representa un toro.