Mecánica de Sólidos

Guía N^o 4: Deformación y movimiento - Parte I

1. Si $\phi = \phi(\boldsymbol{x})$ es un campo escalar sobre $\mathcal{B}$ y $\Phi(\boldsymbol{X}) = \phi(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X})) \equiv \phi(\boldsymbol{x})$, mostrar que
$$\mathrm{Grad}\,\Phi = \boldsymbol{A}^T \mathrm{grad}\,\phi$$
Para $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ campo vectorial sobre $\mathcal{B}$, siendo $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X})) \equiv \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ mostrar que
$$\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{V} = (\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{A}$$

2. Si $\mathrm{A} \equiv A_{i\alpha}$ es la matriz de componentes de $\boldsymbol{A}$ relativa a $\{\boldsymbol{e}_i\}$ y $\{\boldsymbol{E}_\alpha\}$, mostrar que AP^T es la matriz de componentes de $\boldsymbol{A}$ relativa a $\{\boldsymbol{e}_i\}$ y $\{\boldsymbol{E}'_\alpha\}$, con $\boldsymbol{E}'_\alpha = P_{\alpha\beta}\boldsymbol{E}_\beta$, siendo P una matriz ortogonal propia.

3. Mostrar $\mathrm{div}\,(J^{-1}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

4. Sea S una superficie material en $\mathcal{B}_0$. Sea $\boldsymbol{N}$ normal unitaria en un punto de S y sean $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{M}$ vectores unitarios mutuamente ortogonales tangentes a S en $\boldsymbol{X}$ tales que $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M}$. Si $\boldsymbol{A}$ es el gradiente de deformación, S deforma a la superficie s en $\mathcal{B}$ con normal $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m})/\,|\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m}|$, mostrar que
$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m}) = J\boldsymbol{N}, \qquad \boldsymbol{n}\mathrm{d}s = (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m})\mathrm{d}S$$
Comparar con la fórmula de Nanson.

5. Probar el Lema: A todo tensor de orden 2, simétrico definido positivo $\boldsymbol{T}$, le corresponde un único tensor de orden 2 simétrico definido positivo $\boldsymbol{U}$, tal que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^2$.

6. Mostrar que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}^{-2}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{V}^{-2}$, y probar que $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, y $\boldsymbol{U}$ tienen las mismas direcciones principales. Mostrar también que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ y $\boldsymbol{V}$ son coaxiales. Deducir que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ y $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ tienen valores principales λ_i^{-2}.

7. Usar la descomposición espectral
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}$$

para mostrar que el estiramiento $\lambda(\boldsymbol{M})$, con $\boldsymbol{M}$ vector unitario, está dado por

$$\lambda(\boldsymbol{M})^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 M_i^2$$

con $M_i = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)},\ i = 1, 2, 3.$
Mostrar que si

$$\boldsymbol{M} = \cos\phi \boldsymbol{u}^{(1)} + \sin\phi \boldsymbol{u}^{(2)}$$

$$\boldsymbol{M}' = -\sin\phi \boldsymbol{u}^{(1)} + \cos\phi \boldsymbol{u}^{(2)}$$

resulta $\Theta = \pi/2$ y

$$\cos\theta = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\sin 2\phi}{\left(4\lambda_1^2\lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \sin^2 2\phi\right)^{1/2}}$$

Hallar ϕ para el cual el ángulo de corte entre $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{M}'$ es máximo.