# Mecánica de Sólidos
## Guía N° 2: Tensores - Parte II

1. Demostrar

   a) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})$

   b) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{T}^T)$

   c) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}^T) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{T})$.

2. Sea $\boldsymbol{T} \in \mathrm{CT}(2)$ arbitrario e $\boldsymbol{I} \in \mathrm{CT}(2)$ identidad. Mostrar que $\boldsymbol{T}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}$.

3. Mostrar

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{T}^T)^T &= \boldsymbol{T} \\
(\alpha\boldsymbol{S} + \beta\boldsymbol{T})^T &= \alpha\boldsymbol{S}^T + \beta\boldsymbol{T}^T \\
(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})^T &= \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{S}^T
\end{aligned}$$

   $\forall \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}\times\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

4. Mostrar

$$\det(\mathrm{adj}\,\boldsymbol{T}) = (\det\boldsymbol{T})^2$$

5. Sea $A^{\pm}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} \pm \delta_{il}\delta_{jk})$. Si $T_{ij}$ son componentes de un CT(2), mostrar:

   a) $A^{+}_{ijkl}T_{kl}$ son componentes de un CT(2) simétrico;

   b) $A^{-}_{ijkl}T_{kl}$ son componentes de un CT(2) antisimétrico

6. Sean $T_{ij}$ componentes de un CT(2) arbitrario y $\varepsilon_{ijk}T_{jk}$ componentes de un CT(1). Mostrar que $T_{ij}$ es simétrico si y sólo si $\varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0$.

7. Si $W_{ij}$ componentes de un CT(2) antisimétrico $\boldsymbol{W}$, luego $\boldsymbol{w}$ de componentes $w_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{kj}$ es llamado *vector axial* de $\boldsymbol{W}$. Mostrar:

   a) $\varepsilon_{ipq}w_i = W_{qp}$.

   b) $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}$.

   c) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ es el vector axial de $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$.

8. Sea

$$\mathrm{T} \equiv \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ -T_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz de componentes de un $\boldsymbol{T} \in \mathrm{CT}(2)$ antisimétrico en la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Mostrar que, para todo cambio de base $\boldsymbol{e}_i \to \boldsymbol{e}'_i = Q_{ij}\boldsymbol{e}_j$ tal que $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3$, la matriz de coeficientes de $\boldsymbol{T}$ no cambia.