Mecánica de Sólidos

Capítulo I: Tensores

Víctor D. Fachinotti, Juan C. Álvarez Hostos

Programa de Doctorado en Ingeniería
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)

19 de septiembre de 2018

Espacio vectorial

Espacio vectorial (real) V**:** Conjunto de elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ (**"vectores"**) t.q.

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, se verifica

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V \\ &\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \end{aligned}$$

2. $\exists \mathbf{o} \in V$ **(vector nulo)** t.q.

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ &\forall \mathbf{u} \in V, \ \exists (-\mathbf{u}) \in V \text{ t.q. } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o} \end{aligned}$$

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}, \quad \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

Espacio vectorial Euclídeo

Espacio vectorial Euclídeo $\mathbb{E}$: Espacio vectorial real t.q., $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$, se define el **producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$** con las propiedades:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \qquad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o})$$

- El producto escalar es **bilineal**:

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$$

- Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **ortogonales**
- Se define el **módulo** de $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$: $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$
  - Si $|\mathbf{u}| = 1$ entonces $\mathbf{u}$ es un **vector unitario** o **versor**

Producto vectorial

Producto vectorial: dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$ (**notar:** esta operación está restringida a $\mathbb{R}^3$), se define $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathbb{E}$ con las propiedades:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \tag{1}$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \tag{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} \perp (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{v}$$

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Usando (1) para $\mathbf{u} = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{o} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}$$

Usando (2) para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ unitarios:

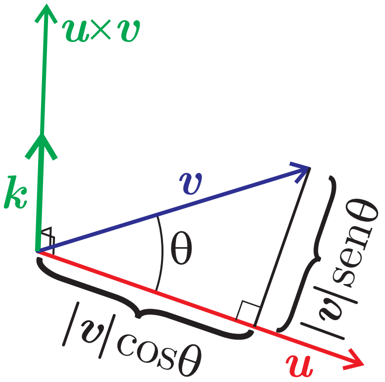
$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = 1$$

Interpretación geométrica de producto escalar y vectorial

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}$$



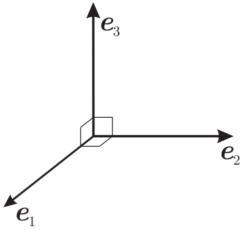
Demostración de (2):

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta)^2 = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$

Bases en $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$

- **Base** $\{\mathbf{v}_i\}$ en $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$: tríada de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{E}$ **linealmente independientes (L.I.)**.
- **Base ortonormal** $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\mathbb{E}$: base formada por vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{E}$ unitarios y mutuamente ortogonales, i.e.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{array} \right\} \equiv \delta_{ij} \quad \textbf{(delta de Krönecker)}$$



Descomposición de vectores

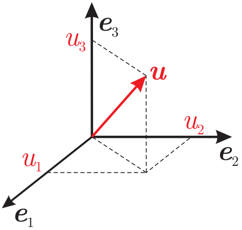
- Todo $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ puede descomponerse como

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \tag{3}$$

u_j : **componente** de $\mathbf{u}$ respecto de $\mathbf{e}_j$

Haciendo (3)$\cdot\mathbf{e}_i$:

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$$



Convención de sumatoria de Einstein

En notación indicial, la convención de sumatoria de Einstein implica suma sobre cada índice que aparece repetido (**índice “dummy” o mudo**).
Se llama **índice libre** al que aparece sólo una vez.

Ejemplo

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} u_j\mathbf{e}_j \equiv u_j\mathbf{e}_j,$$

$$\delta_{ij}u_j = \delta_{i1}u_1 + \delta_{i2}u_2 + \delta_{i3}u_3 = u_i$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (u_i\mathbf{e}_i)\cdot(v_j\mathbf{e}_j) = u_iv_j\,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = u_iv_j\delta_{ij} = u_jv_j$$

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_ju_j$$

$$[\mathrm{AB}]_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

Símbolo de permutación

Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ una tríada **dextrógira**, i.e.:

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \tag{4}$$

Se define el **símbolo de alternancia, de permutación o de Levi-Civita:**

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ permutación cíclica de 123} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ permutación cíclica de 321} \\ 0 & \text{demás casos.} \end{cases}$$
$$= \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$$

Ahora, (4) puede escribirse

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$$

Producto vectorial en notación indicial

Siendo

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

Producto vectorial en notación indicial:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i) \times (v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j \, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \underbrace{\varepsilon_{ijk} u_i v_j}_{[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_k} \mathbf{e}_k$$

Producto escalar triple

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (\varepsilon_{ijp}u_i v_j \mathbf{e}_p)\cdot(w_k\mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ijk}u_i v_j w_k \tag{5}$$

Expandiendo (5):

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= \varepsilon_{123}u_1v_2w_3 + \varepsilon_{132}u_1v_3w_2 + \varepsilon_{231}u_2v_3w_1\\ &+ \varepsilon_{213}u_2v_1w_3 + \varepsilon_{312}u_3v_1w_2 + \varepsilon_{321}u_3v_2w_1\\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)\\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

Producto escalar triple

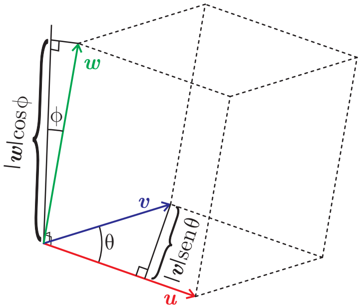
- Regla de conmutatividad

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\
&= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ **linealmente dependientes (L.D.)** $\iff (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$

Interpretación geométrica del producto escalar triple

$$
\begin{aligned}
|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| &= |(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta)(|\mathbf{w}| \cos\phi)| \\
&= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\
&= \text{volumen del paralelepípedo} \\
&\quad \text{de lados paralelos a } \mathbf{u},\ \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{w}
\end{aligned}
$$



Ejercicio

Sea A *una matriz* 3×3 *de elementos* A_{ij}. *Usando (5) y (6), mostrar:*

$$\det \mathrm{A} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \det \mathrm{A}^T \tag{7}$$

Deducir luego:

$$\varepsilon_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr} = (\det \mathrm{A}) \varepsilon_{pqr} \tag{8}$$

Producto escalar triple entre vectores base

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k &= \varepsilon_{pqr}[\mathbf{e}_i]_p[\mathbf{e}_j]_q[\mathbf{e}_k]_r \\
&= \varepsilon_{pqr}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_q)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_r) \\
&= \varepsilon_{pqr}\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \\
&= \varepsilon_{iqr}\delta_{jq}\delta_{kr} = \varepsilon_{ijr}\delta_{kr} \\
&= \varepsilon_{ijk}
\end{aligned}
$$

- Dada una tríada ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, si

$$
(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{cases} 1, & \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ es } \textbf{dextrógira} \\ -1, & \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ es } \textbf{sinistrógira} \end{cases}
$$

Igualdad epsilon-delta

- Dado

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{pqr}\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

resulta

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \det\left(\begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1} \\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2} \\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Notar: $\delta_{i1}\delta_{p1} + \delta_{i2}\delta_{p2} + \delta_{i3}\delta_{p3} = \delta_{ij}\delta_{pj} = \delta_{ip}$

Igualdad epsilon-delta

Hagamos $r = k$ en (9):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{kp}(\delta_{iq}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jq}) - \delta_{kq}(\delta_{ip}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jp}) \\
&\quad + \delta_{kk}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \\
&= (\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq}) - (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) + 3(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \\
&= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ **Igualdad ε-δ:**

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \tag{10}$$

Producto vectorial triple

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= u_s \mathbf{e}_s \times (\varepsilon_{kpq} v_p w_q \mathbf{e}_k) \\
&= \varepsilon_{kpq} \varepsilon_{krs} v_p w_q u_s \mathbf{e}_r \\
&= (\delta_{pr}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qr}) v_p w_q u_s \mathbf{e}_r \\
&= (w_q u_q)(v_p \mathbf{e}_p) - (v_p u_p)(w_q \mathbf{e}_q) \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}
\end{aligned}
$$

- Regla nemotécnica: haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}$, $\mathbf{c} = \mathbf{w}$,

$$
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} \qquad (abc = cab - bac)
$$

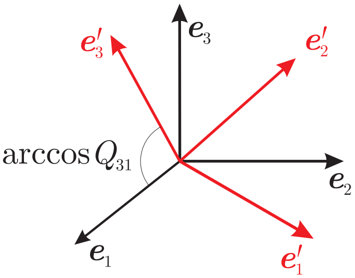
Cambio de base ortonormal

- Sea $\{\mathbf{e}'_i\}$ una segunda base ortonormal dextrógira
- En la base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{e}'_i = \underbrace{(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_p)}_{[\mathbf{e}'_i]_p} \mathbf{e}_p = Q_{ip}\mathbf{e}_p$$

- Interpretación geométrica:

$$Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j)$$



Propiedades de la matriz de rotación

Definimos la **matriz de rotación**:

$$\mathrm{Q} = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}'_1]_1 & [\mathbf{e}'_1]_2 & [\mathbf{e}'_1]_3 \\ [\mathbf{e}'_2]_1 & [\mathbf{e}'_2]_2 & [\mathbf{e}'_2]_3 \\ [\mathbf{e}'_3]_1 & [\mathbf{e}'_3]_2 & [\mathbf{e}'_3]_3 \end{bmatrix}$$

- Por la ortonormalidad de $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\underbrace{\delta_{ij}}_{=[\mathrm{I}]_{ij}} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = Q_{ik}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_j) = Q_{ik}Q_{jk} = \underbrace{Q_{ik}Q^T_{kj}}_{=[\mathrm{Q}\mathrm{Q}^T]_{ij}}$$

$$\mathrm{Q}\mathrm{Q}^T = \mathrm{I} \Longrightarrow \mathrm{Q}^T = \mathrm{Q}^{-1} \qquad \textbf{(matriz ortogonal)}$$

$$[\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}]_{ij} = Q^T_{ik}Q_{kj} = Q_{ki}Q_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow Q_{ki}Q_{kj} = \delta_{ij} = Q_{ik}Q_{jk} \qquad (11)$$

Propiedades de la matriz de rotación

$$\det(\mathrm{Q}\mathrm{Q}^T) \equiv (\det \mathrm{Q})^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det \mathrm{Q} = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Q} \text{ **ortogonal propia (rotación)**} \\ \{\mathbf{e}'_i\} \text{ **dextrógira**} \end{cases} \\ -1 & \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Q} \text{ **ortogonal impropia (reflexión)**} \\ \{\mathbf{e}'_i\} \text{ **sinistrógira**} \end{cases} \end{cases}$$

- Notar que

$$\det \mathrm{Q} = \begin{vmatrix} [\mathbf{e}'_1]_1 & [\mathbf{e}'_1]_2 & [\mathbf{e}'_1]_3 \\ [\mathbf{e}'_2]_1 & [\mathbf{e}'_2]_2 & [\mathbf{e}'_2]_3 \\ [\mathbf{e}'_3]_1 & [\mathbf{e}'_3]_2 & [\mathbf{e}'_3]_3 \end{vmatrix} \equiv (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3$$

Cambio de base ortonormal

Dado

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ip}\mathbf{e}_p \tag{12}$$

Premultiplicando (12) por Q_{ij} y usando (11):

$$\begin{aligned} Q_{ij}\mathbf{e}'_i &= Q_{ij}Q_{ip}\mathbf{e}_p = \delta_{jp}\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_j \\ \implies \mathbf{e}_i &= Q_{ji}\mathbf{e}'_j \end{aligned}$$

Componentes de vectores en dos bases ortonormales

Dadas las bases ortonormales $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$ relacionadas entre sí por

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ip}\mathbf{e}_p, \qquad \mathbf{e}_i = Q_{ji}\mathbf{e}'_j$$

Sean v_i, v'_i componentes de $\mathbf{v}$ respecto de $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}'_i\}$, luego:

$$\mathbf{v} = v_j\mathbf{e}_j = v_j Q_{kj}\mathbf{e}'_k \equiv v'_k\mathbf{e}'_k \Longrightarrow v'_k = Q_{kj}v_j$$

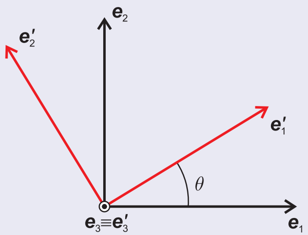
$$\mathbf{v} = v'_k\mathbf{e}'_k = v'_k Q_{kj}\mathbf{e}_j \equiv v_j\mathbf{e}_j \Longrightarrow v_j = Q_{kj}v'_k$$

$\Longrightarrow$ las componentes de $\mathbf{v}$ transforman como los vectores de base

Ejemplo

- *Sea* $\{\mathbf{e}'_i\}$ *resultante de rotar* $\{\mathbf{e}_i\}$ *un ángulo* θ *alrededor de* $\mathbf{e}_3$*:*

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}'_2 &= -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3\end{aligned}\right\} \quad (13)$$



$$\Rightarrow \mathrm{Q} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- *Puede verificarse que* Q *es ortogonal propia.*

Espacio Euclídeo de puntos

- **Espacio Euclídeo de puntos:**
  conjunto $\mathcal{E}$ de **puntos** x, y, z t.q.,
  $\forall x, y \in \mathcal{E}$, $\exists \mathbf{v}(x, y) \in \mathbb{E}$, y
  $\forall x, y, z \in \mathcal{E}$ se verifica

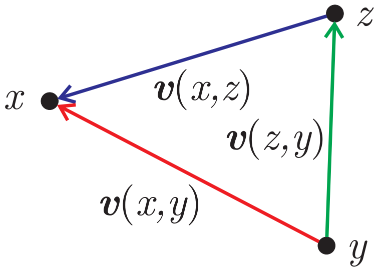
$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}(x, z) + \mathbf{v}(z, y) \qquad (14)$$

$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}(x, z) \iff y \equiv z$$

Por (14):

$$\mathbf{v}(x, x) = \mathbf{o} \qquad \forall x \in \mathcal{E}$$

$$\mathbf{v}(y, x) = -\mathbf{v}(x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$$

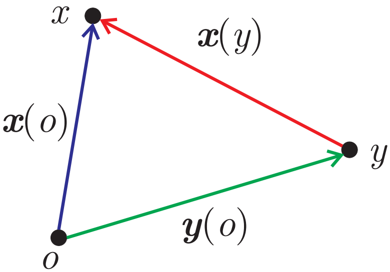


Origen y vector posición

- Introducimos la notación $\mathbf{x}(y) \equiv \mathbf{v}(x, y)$
- **Adopción de un origen**: tomamos un punto fijo arbitrario $o \in \mathcal{E}$ como **origen**.

  Luego, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(o)$ es el **vector posición** de x (relativo a o).

- Notar que $\mathbf{x}(y) = \mathbf{x}(o) - \mathbf{y}(o)$ es *independiente de la elección de o.*



Distancia - Espacio métrico

- **Distancia** $d(x, y)$ entre $x, y \in \mathcal{E}$:

$$d(x, y) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \tag{15}$$

  El mapeo bilineal $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ es una **métrica**, i.e.:

  1. $d(x, y) = d(y, x)$
  2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
  3. $d(x, y) \geq 0$, con $d(x, y) = 0 \iff x \equiv y$

- Al estar dotado de una métrica, $\mathcal{E}$ constituye un **espacio métrico**

Coordenadas cartesianas

- Para o fijo, a cada $x \in \mathcal{E}$ corresponde $!\mathbf{x} \in \mathbb{E}$
- Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ una base ortonormal de $\mathbb{E}$
- Las componentes x_i de $\mathbf{x}$ están dadas por $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$
- Definimos el mapeo $e_i : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ como:

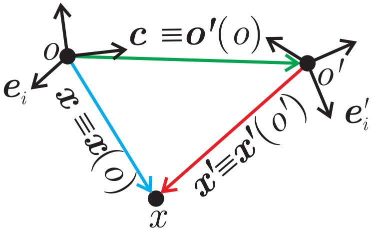
$$e_i(x) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

  - $\{o, e_i\}$: **sistema coordenado cartesiano rectangular** en $\mathcal{E}$
  - x_i: **coordenadas cartesianas** del punto x en $\{o, e_i\}$

Cambio de coordenadas cartesianas

- Sean dos sistemas coordenados $\{o, e_i\}$, $\{o', e'_i\}$ t.q. $\mathbf{e}'_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j$
- Dado el punto $x \in \mathcal{E}$, su posición en $\{o', e'_i\}$ resulta

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(o') = \mathbf{x}(o) - \mathbf{o}'(o) = \mathbf{x} - \mathbf{c}$$



- Tomando producto escalar con $\mathbf{e}'_i$:

$$x'_i \equiv \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}'_i = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (Q_{ij}\mathbf{e}_j) = Q_{ij}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x} - \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{c}) = Q_{ij}(x_j - c_j)$$

Cambio de coordenadas cartesianas

- La transformación de $\{o, e_i\} \to \{o', e'_i\}$ está definida por

$$x'_i = Q_{ik}(x_k - c_k), \qquad Q_{ik}, c_k \in \mathbb{R} \text{ constantes} \tag{16}$$

La matriz **jacobiana** de esta transformación es la matriz cuya componente *ij* es:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = Q_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = Q_{ik}\delta_{kj} = Q_{ij} \tag{17}$$

Cambio de coordenadas cartesianas

- Multipliquemos (16) por Q_{ik}:

$$Q_{ik}x'_i = Q_{ik}Q_{ij}(x_j - c_j) = \delta_{kj}x_j - Q_{ik}(Q_{ij}c_j) = x_k - Q_{ik}c'_i$$

$\Rightarrow$ la transformación $\{o', e'_i\} \to \{o, e_i\}$ está definida por

$$x_k = Q_{ik}(x'_i + c'_i) \qquad Q_{ik}, c'_i \in \mathbb{R} \text{ constantes}$$

La matriz **jacobiana** de esta transformación es la matriz cuya componente ij es:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = Q_{ki}\frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} = Q_{ki}\delta_{kj} = Q_{ji} \tag{18}$$

Cambio de coordenadas cartesianas

Comparando (17) y (18):

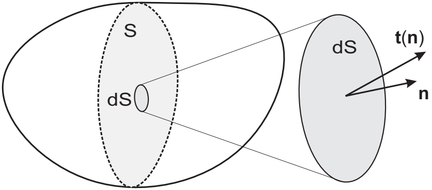
$$Q_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

- Por regla de la cadena:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}}_{Q_{ki}} \underbrace{\frac{\partial x'_k}{\partial x_j}}_{Q_{kj}} \implies \mathrm{Q} \equiv [Q_{ij}] \text{ ortogonal}$$

Tensión en un continuo

- Sea un elemento infinitesimal de área dS con normal $\mathbf{n}$. El material a un lado de dS ejerce sobre el material al otro lado una fuerza $\mathbf{t}dS$.



- El *vector de tensión* $\mathbf{t}$ verifica:
  1. Dimensión: [fuerza/área]
  2. Depende de la orientación $\mathbf{n}$ de $dS \Longrightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$
  3. $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$
- Postulamos que $\mathbf{t}$ depende **linealmente** de $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n} \tag{19}$$

- $\mathbf{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$: mapeo lineal independiente de $\mathbf{n}$

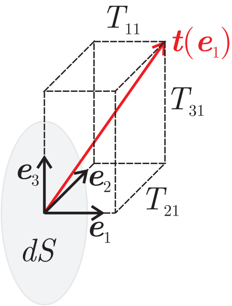
- Respecto de la base $\{\mathbf{e}_i\}$, (19) toma la forma

$$t_i(\mathbf{n}) = T_{ij} n_j \tag{20}$$

T_{ij}: **componentes (cartesianas)** de $\mathbf{T}$ respecto de la base $\{\mathbf{e}_i\}$.

- Adoptemos $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1$ en (19):

$$t_i(\mathbf{e}_1) = T_{ij}[\mathbf{e}_1]_j = T_{ij}\delta_{1j} = T_{i1}$$



- Adoptando $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_2$ en (19):

$$t_i(\mathbf{e}_2) = T_{i2}$$

- Adoptando $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_3$ en (19):

$$t_i(\mathbf{e}_3) = T_{i3}$$

$\Rightarrow$ T_{ij} son las componentes de los vectores de tensión actuantes sobre los tres planos coordenados, mutuamente perpendiculares, que pasan por un punto material

Tensor de tensión

- El **estado de tensión** está caracterizado por:
    1. las componentes T_{ij} en una base $\{\mathbf{e}_i\}$, o
    2. el mapeo lineal $\mathbf{T}$ (descripción invariante)
- $\mathbf{T}$ es un **tensor** (de 2º orden) en $\mathbb{E}$. En este caso, es el **tensor de tensiones**

Ejemplo

Para un fluido invíscido a presión p, $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ (en componentes, $T_{ij} = -p\delta_{ij}$)

- Sean t_i, T_{ij}, n_j y t'_i, T'_{ij}, n'_j componentes de $\mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{n}$ en $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$, respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} t'_i = T'_{ij} n'_j &= Q_{ik} t_k \\ &= Q_{ik} T_{kl} n_l \\ &= Q_{ik} T_{kl} Q_{jl} n'_j \end{aligned}$$

  Dado que n'_j es arbitrario, llegamos a la **regla de transformación de componentes de un tensor de segundo orden bajo cambio de base ortonormal** $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} T_{kl}$$

- Esta regla será usada para caracterizar tensores

Tensores cartesianos de 2º orden

- **Tensor cartesiano de 2º orden** (CT(2)): entidad **T** de componentes T_{ij} respecto de una base $\{\mathbf{e}_i\}$ que transforma como

$$T'_{ij} = Q_{ip} Q_{jq} T_{pq} \tag{21}$$

bajo cambio de base $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}'_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j$

- Si ordenamos los componentes de los tensores en las matrices $\mathrm{T} = [T_{ij}]$, $\mathrm{T}' = [T'_{ij}]$, $\mathrm{Q} = [Q_{ij}]$, podemos rescribir (21) como

$$\mathrm{T}' = \mathrm{Q}\mathrm{T}\mathrm{Q}^T$$

Por la ortogonalidad de Q, $\mathrm{Q}^{-1} \equiv \mathrm{Q}^T$, luego

$$\mathrm{T} = \mathrm{Q}^T\mathrm{T}'\mathrm{Q}$$

Tensores cartesianos de orden n

- **Tensor cartesiano de orden** n (CT(n)): entidad $\mathbf{T}$ de componentes $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ (n índices) respecto de una base $\{\mathbf{e}_i\}$ que transforma como

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \ldots Q_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \ldots j_n} \tag{22}$$

bajo cambio de base $\mathbf{e}_i \to \mathbf{e}'_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j$

Ejemplo

1. *Un escalar es CT(0)*
2. *Un vector es CT(1)*
3. *Un tensor de tensiones es CT(2)*
4. *La delta de Krönecker es CT(2) porque*

$$\delta'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = (Q_{ip}\mathbf{e}_p) \cdot (Q_{jq}\mathbf{e}_q) = Q_{ip}Q_{jq}\delta_{pq}$$

5. *El símbolo de permutación ε_{ijk} es CT(3)*

Producto tensorial entre vectores

- Definimos el **producto tensorial o diádico** $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ entre los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ como el CT(2) de componentes $[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]_{ij} = u_i v_j$.

  Se verifica que es CT(2):

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]'_{ij} = u'_i v'_j = Q_{ip} Q_{jq} u_p v_q = Q_{ip} Q_{jq} [\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]_{pq}$$

- $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ aplicado a $\mathbf{w} \in \mathbb{E}$ da el vector

$$[(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w}]_i = (u_i v_j) w_j = (v_j w_j) u_i$$

  o

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$$

  En particular:

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_i = n_j \mathbf{e}_i \qquad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{E} \tag{23}$$

Representación indicial de un tensor de 2º orden

- Para $\mathbf{T} \in \mathrm{CT}(2)$, se multiplica (23) por T_{ij}:

$$(T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} = T_{ij}n_j\mathbf{e}_i = [\mathbf{Tn}]_i\mathbf{e}_i = \mathbf{Tn}$$

Como $\mathbf{n}$ es arbitrario, tenemos

$$\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{24}$$

$\Rightarrow \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ constituye una *base* en $\mathbb{R}^9$ (espacio vectorial real 9D) de tensores de 2º orden

- Así como $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ para $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$, podemos obtener las componentes del tensor de 2º orden $\mathbf{T}$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ haciendo:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_l = T_{ij}\,\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_l = T_{ij}\,\mathbf{e}_k \cdot ([\mathbf{e}_l]_j\mathbf{e}_i) = T_{ij}\delta_{lj}\delta_{ki} = T_{kl}$$

Notar:

1. En general, **no** pueden encontrarse $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ tal que $\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ para $\mathbf{T} \in \mathrm{CT}(2)$ arbitrario
2. $\mathbf{I}$, tensor identidad de componentes cartesianas δ_{ij}, resulta

$$\mathbf{I} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \qquad \forall\{\mathbf{e}_i\} \text{ ortonormal}$$

Tensores de orden $n > 2$

1. El producto tensorial se puede repetir, por ejemplo:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = u_i v_j w_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \qquad \text{es un CT(3)}$$

$\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k\}$ constituye una base en el espacio $\mathbb{R}^{3^3}$ (espacio vectorial real 27D) de tensores de tercer orden.

La expresión general de un CT(3) es:

$$\mathbf{T} = T_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

2. La expresión general de un CT(n) es:

$$\mathbf{T} = T_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_n}$$

referido a la base $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_n}\}$ del espacio $\mathbb{R}^{3^n}$ (espacio vectorial real 3^nD) de tensores de orden n.

Producto tensorial entre tensores

- Se define el **producto tensorial** entre los tensores $\mathbf{S} \in \mathrm{CT}(m)$ y $\mathbf{T} \in \mathrm{CT}(n)$ como el tensor $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} \in \mathrm{CT}(m+n)$:

$$\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} = S_{i_1 \ldots i_m} T_{j_1 \ldots j_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}$$

Contracción

Contracción: Sean $T_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_q \dots i_n}$ componentes de un CT(n). Hacemos $i_p = i_q$ y sumamos sobre i_p de 1 a 3. Estos índices se dicen **contraídos** y el orden del tensor se reduce en dos.

1. $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ contrae en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
2. $\mathbf{T} \in$ CT(2) contrae en el escalar $T_{ii} = \operatorname{tr} \mathbf{T}$ (traza de $\mathbf{T}$), invariante escalar de $\mathbf{T}$ pues

$$T'_{ii} = Q_{ip} Q_{iq} T_{pq} = \delta_{pq} T_{pq} = T_{pp}$$

3. Dados $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in$ CT(2), el producto tensorial $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} \in$ CT(4) de componentes $[\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}]_{ijkl} = S_{ij} T_{kl}$ contrae de diversas maneras, por ejemplo:

   $j = k$: $S_{ij} T_{jl} = [\mathbf{ST}]_{il}$, donde $\mathbf{ST} \in$ CT(2) es el producto interno entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$, que contrae a su vez en el escalar $\operatorname{tr}(\mathbf{ST}) = S_{ij} T_{ji}$,

   $j = l$: $S_{ij} T_{kj} = [\mathbf{ST}^T]_{ik}$, donde $\mathbf{ST}^T \in$ CT(2) es el producto interno entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}^T$, que contrae a su vez en el escalar $\operatorname{tr}(\mathbf{ST}^T) = S_{ij} T_{ij} \equiv \mathbf{S} : \mathbf{T}$

4. $\mathbf{TT} = \mathbf{T}^2$, $\mathbf{TT}^2 = \mathbf{T}^3$, $\dots, \mathbf{TT}^{(n-1)} = \mathbf{T}^n$ (n entero) contraen en $\operatorname{tr}(\mathbf{T}^2)$, $\operatorname{tr}(\mathbf{T}^3)$, $\dots, \operatorname{tr}(\mathbf{T}^n)$, invariantes escalares de $\mathbf{T}$

Tensores isótropos

Tensor isótropo: aquél cuyas componentes **no** cambian por cambios de base (ortogonal propia) arbitrarios.

CT(0): Todos los escalares son isótropos.

CT(1): No existen vectores isótropos no triviales.

CT(2): Los únicos tensores isótropos son $\alpha\mathbf{I}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

CT(3): Los únicos tensores isótropos son aquéllos de componentes $\alpha\varepsilon_{ijk}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

CT(4): Los únicos tensores $\mathbf{T} \in \mathrm{CT}(4)$ isótropos tienen componentes $T_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

CT(>4): Sus componentes se expresan como combinaciones lineales de productos de deltas de Krönecker y símbolos de permutación.

Isotropía en CT(1)

- Supongamos que el vector **v** es isótropo, entonces

$$Q_{ij} v_j = v_i, \qquad \text{o} \qquad \mathrm{Q}\mathrm{v} = \mathrm{v}, \ \forall \mathrm{Q} \text{ ortogonal propia}$$

  Elegimos:

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

  (rotación $\pi/2$ en torno a $\mathbf{e}_3$), tenemos $v_1 = v_2 = 0$.

- Similarmente, tomando rotación $\pi/2$ en torno a $\mathbf{e}_1$ o $\mathbf{e}_2$, vemos que $v_3 = 0$.

  $\Rightarrow$ Sólo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ es isótropo.

Isotropía en CT(2)

- Sea **T** un CT(2) isótropo:

$$Q_{ip}Q_{jq}T_{pq} = T_{ij}, \quad \text{o} \quad \mathrm{Q}\mathrm{T}\mathrm{Q}^T = \mathrm{T}, \ \forall \mathrm{Q} \text{ ortogonal propia} \tag{26}$$

Para Q dada por (25), tenemos :

$$\begin{bmatrix} T_{22} & -T_{21} & T_{23} \\ -T_{12} & T_{11} & -T_{13} \\ T_{32} & -T_{31} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{22} = T_{11}, T_{12} = -T_{21}, T_{23} = T_{32} = T_{13} = T_{31} = 0$$

Isotropía en CT(2)

La elección

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(rotación $\pi/2$ alrededor de $\mathbf{e}_1$) da $T_{12} = T_{21} = 0$ y $T_{33} = T_{11}$, de forma que

$$T_{ij} = T_{11}\delta_{ij}$$

Como (26) vale para $\alpha\mathrm{T}$, con α escalar arbitrario, necesariamente **T** es múltiplo de **I**.

Isotropía en CT(3)

- Se demuestra que todo múltiplo del tensor CT(3) de componentes ε_{ijk} es isótropo:

$$\varepsilon'_{ijk} \equiv Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} \varepsilon_{pqr} = (\det \mathrm{Q}) \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}, \quad \forall \mathrm{Q} \text{ ortogonal propia}$$

Tensores de 2º orden como mapeo lineal

- Revemos ahora la teoría en forma invariante, i.e., sin recurrir a la definición de una base.
- **Tensores de 2º orden como mapeo lineal:** el tensor de 2$^{\text{o}}$ orden $\mathbf{T}$ es el mapeo lineal $\mathbf{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, o:

$$\mathbf{T} : \mathbf{u} \to \mathbf{Tu} \qquad \text{con } \mathbf{Tu} \in \mathbb{E} \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}$$

Linealidad implica

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{Tu} + \beta \mathbf{Tv}, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Los tensores de 2$^{\text{o}}$ orden pertenecen al conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ de todos los mapeos lineales de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$, que es un **espacio vectorial**.

Producto interno entre tensores de 2º orden

- Se define el **producto interno ST** como

$$(\mathbf{ST})\mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{Tu}), \qquad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}), \mathbf{u} \in \mathbb{E}$$

  En componentes cartesianas, $[\mathbf{ST}]_{ij} = S_{ik} T_{kj}$, que es una contracción de $\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$.

- Los tensores **cero** $\boldsymbol{0}$ y **unitario** o **identidad I** de 2º orden satisfacen

$$\boldsymbol{0}\mathbf{u} = \mathbf{o}, \qquad \mathbf{Iu} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}$$

Tensores de 2º orden como mapeo bilineal

- **Tensores de 2º orden como mapeo bilineal:** el tensor de 2º orden $\mathbf{T}$ es la función bilineal $\mathbf{T} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v})$$

- Los tensores de 2º orden pertenecen al conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ de todos las funciones bilineales de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ en $\mathbb{R}$, que es un **espacio vectorial**.
- Dado el tensor $\mathbf{T}$ de 2º orden, podemos decir indistintamente que $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ o que $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$.
- Tales espacios se dicen **isomorfos**.

Dada una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ para $\mathbb{E}$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_i \\
&= \mathbf{u} \cdot v_j \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) v_j = u_i v_j = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij}
\end{aligned}
$$

Para $\mathbf{T}$ arbitrario,

$$
\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{T}(u_i \mathbf{e}_i, v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v})
$$

Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ son arbitrarios,

$$
\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \textbf{(representación de T en la base } \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}\textbf{)}
$$

Luego, por (24),

$$
\mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = T_{ij} \qquad \textbf{(componente de T relativa a la base } \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}\textbf{)}
$$

Tensor transpuesto

- Definimos el **tensor transpuesto** $\mathbf{T}^T$ t.q.

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{T}\mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{E}$$

- En componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} u_i[\mathbf{T}^T]_{ij}v_j &= v_j T_{ji} u_i \qquad \forall u_i, v_j \\ \Rightarrow T^T_{ij} \equiv [\mathbf{T}^T]_{ij} &= T_{ji} \end{aligned}$$

Tensor simétrico de 2º orden

Un tensor de 2º orden $\mathbf{S}$ es **simétrico** si $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$. En componentes cartesianas, $S_{ij} = S_{ji}$.

Ejemplo

El tensor identidad de 2º orden $\mathbf{I}$ *es simétrico, pues*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, & \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}^T \mathbf{u} & \qquad \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{I}^T \end{aligned}$$

Tensor antisimétrico de 2º orden

Un tensor de 2º orden $\mathbf{W}$ es **antisimétrico (o skew)** si $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$. En componentes cartesianas, $W_{ij} = -W_{ji}$.

- El vector $\mathbf{w}$ de componentes cartesianas $w_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{kj}$ es llamado **vector axial** de $\mathbf{W}$

Ejercicio

Mostrar:

1. $\varepsilon_{ipq}w_i = W_{qp}$
2. $\mathbf{w} \times \mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}$

Tensores simétricos y antisimétricos de 2º orden

- Un tensor simétrico de 2º orden (en $\mathbb{R}^3$) tiene 6 componentes independientes.
- Un tensor antisimétrico de 2º orden (en $\mathbb{R}^3$) tiene 3 componentes independientes.
- Un tensor arbitrario puede escribirse como suma de uno simétrico y uno antisimétrico:

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T\right)}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T\right)}_{\text{antisimétrico}}$$

Determinante de tensores de 2º orden

- Definimos el **determinante** de $\mathbf{T}$ como el determinante de la matriz T de componentes de $\mathbf{T}$ en una base ortonormal:

$$\det \mathbf{T} = \varepsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3}$$

Siendo $\mathrm{T}' = \mathrm{Q}\mathrm{T}\mathrm{Q}^{T}$, resulta:

$$\det \mathrm{T}' = \det \mathrm{Q} \det \mathrm{T} \det \mathrm{Q}^{T} = \det \mathrm{T}$$

$\Rightarrow$ det $\mathbf{T}$ es un invariante escalar de $\mathbf{T}$

Inversa de un tensor de 2º orden

- Si $\det \mathbf{T} \neq 0$, existe un único tensor $\mathbf{T}^{-1}$, llamado **tensor inverso** de $\mathbf{T}$, t.q.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} \\ \det(\mathbf{T}^{-1}) &= (\det \mathbf{T})^{-1} \\ (\mathbf{S}\mathbf{T})^{-1} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1} \qquad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}) \end{aligned} \tag{27}$$

- Se define el **tensor adjunto** de $\mathbf{T}$:

$$\operatorname{adj} \mathbf{T} = (\det \mathbf{T})\mathbf{T}^{-T} \qquad \text{con } \mathbf{T}^{-T} = (\mathbf{T}^{T})^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^{T}$$

Autovectores y autovalores de un tensor de 2º orden

- **Autovectores de un tensor de 2º orden**: dado $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ es **autovector** de $\mathbf{T}$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{28}$$

  λ: **autovalor** de $\mathbf{T}$ correspondiente a $\mathbf{v}$

- Las ecuaciones (28) tienen solución no trivial $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ si

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \qquad \textbf{(ecuación característica para T)} \tag{29}$$

Invariantes principales de un tensor de 2º orden

- La expansión de $(-1)\times(29)$ da:

$$-\det(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}) = -\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{32} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - I_1(\mathbf{T})\lambda^2 + I_2(\mathbf{T})\lambda - I_3(\mathbf{T}) = 0 \qquad (30)$$

donde I_i son los **invariantes principales de T**:

$$I_1(\mathbf{T}) = \operatorname{tr}\mathbf{T}$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{T})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{T}^2\right]$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \det\mathbf{T} = \frac{1}{6}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{T})^3 - 3\operatorname{tr}\mathbf{T}\operatorname{tr}\mathbf{T}^2 + 2\operatorname{tr}\mathbf{T}^3\right]$$

- Para cada solución real de (30) tenemos un autovector **v** real.

Teorema de Cayley-Hamilton

Aplicando $\mathbf{T}$ a (28) $r-1$ veces, tenemos

$$\mathbf{T}^r\mathbf{v} = \lambda^r\mathbf{v} \tag{31}$$

Multiplicando (30) por $\mathbf{v}$ y usando (31):

$$\begin{aligned} \lambda^3\mathbf{v} - I_1(\mathbf{T})\lambda^2\mathbf{v} + I_2(\mathbf{T})\lambda\mathbf{v} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{v} &= \mathbf{o} \\ \left[\mathbf{T}^3 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T}^2 + I_2(\mathbf{T})\mathbf{T} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{I}\right]\mathbf{v} &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{T}^3 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T}^2 + I_2(\mathbf{T})\mathbf{T} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathit{0} \tag{32}$$

- **Teorema de Cayley-Hamilton:** todo tensor de 2º orden satisface su propia ecuación característica

Ejercicio

Si $\det \mathbf{T} \neq 0$ *mostrar:*

$$\det(\mathbf{T}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) = 0$$

y luego:

$$\lambda^{-3} - I_1(\mathbf{T}^{-1})\lambda^{-2} + I_2(\mathbf{T}^{-1})\lambda^{-1} - I_3(\mathbf{T}^{-1}) = 0$$

con:

$$I_1(\mathbf{T}^{-1}) = I_2(\mathbf{T})/I_3(\mathbf{T})$$
$$I_2(\mathbf{T}^{-1}) = I_1(\mathbf{T})/I_3(\mathbf{T})$$
$$I_3(\mathbf{T}^{-1}) = 1/I_3(\mathbf{T})$$

Ejercicio

Mostrar

$$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{T}^2 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T} + I_2(\mathbf{T})\mathbf{I})/I_3(\mathbf{T})$$

y deducir que $\mathbf{T}^r$ *puede expresarse en términos de* $\mathbf{I}, \mathbf{T}$, *y* $\mathbf{T}^2$, *con coeficientes invariantes de* $\mathbf{T}$, *para* r *entero positivo o negativo.*

Autovalores y autovectores para tensores simétricos

Sean λ_i y $\mathbf{v}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, autovalores y autovectores de $\mathbf{T}$. Luego:

$$\mathbf{T}\mathbf{v}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} \qquad \text{(no suma en } i\text{)}$$

de donde:

$$\mathbf{v}^{(j)} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}^{(i)}) = \lambda_i \mathbf{v}^{(j)} \cdot \mathbf{v}^{(i)} \tag{33}$$

$$\mathbf{v}^{(i)} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}^{(j)}) = \mathbf{v}^{(j)} \cdot (\mathbf{T}^T\mathbf{v}^{(i)}) = \lambda_j \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)} \tag{34}$$

Si $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, haciendo (33)−(34) obtenemos:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)} = 0 \tag{35}$$

Autovalores y autovectores para tensores simétricos

- De (35), resulta
  1. Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$:
  $$\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)} = 0 \tag{36}$$
  2. Si $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$, $i \neq j \neq k \neq i$:
  $$\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(j)} \cdot \mathbf{v}^{(k)} = 0$$
  Pueden elegirse vectores $\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)}$ arbitrarios, normales a $\mathbf{v}^{(k)}$ y normales entre sí.
  3. Si $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$, $i \neq j \neq k \neq i$, pueden elegirse vectores $\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}^{(k)}$ (arbitrarios) mutuamente ortogonales.
- En todo caso, los autovectores de $\mathbf{T}$ simétrico son **mutuamente ortogonales**

Autovalores para tensores simétricos

Probaremos que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ por el absurdo:

- Si $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisface la ecuación característica, también lo hace su conjugado $\overline{\lambda}_i \in \mathbb{C}$
- Si $\mathbf{v}^{(i)}$ es el autovector correspondiente a λ_i, su conjugado $\overline{\mathbf{v}}^{(i)}$ es el autovector correspondiente a $\overline{\lambda}_i$
- Luego:

$$\underbrace{(\lambda_i - \overline{\lambda}_i)}_{\neq 0}\underbrace{\mathbf{v}^{(i)} \cdot \overline{\mathbf{v}}^{(i)}}_{=|\mathbf{v}^{(i)}|^2>0} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Imposible verificar (35) $\Longrightarrow$ los autovalores de $\mathbf{T}$ simétrico deben ser reales

Representación espectral de tensores simétricos

- Sean $\mathbf{v}^{(i)}$ autovectores de $\mathbf{T}$ normalizados (i.e., $|\mathbf{v}^{(i)}| = 1$) t.q.

$$\mathbf{I} = \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)} \qquad \text{(suma sobre } i\text{)}$$

  Llegamos a la **representación espectral de T**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{I} = (\mathbf{T}\mathbf{v}^{(i)}) \otimes \mathbf{v}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)}$$

- La matriz de componentes T' en la base $\{\mathbf{v}^{(i)}\}$ es diagonal, con componentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- En la base $\{\mathbf{e}_i\}$, la matriz de componentes T:

$$\mathrm{T} = \mathrm{Q}^T \mathrm{T}' \mathrm{Q}$$

  con $Q_{ij} = \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{e}_j$

Representación espectral de tensores simétricos

- Si $\lambda_2 = \lambda_1$:
$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{I} + (\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{v}^{(3)} \otimes \mathbf{v}^{(3)}$$
- Si $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$:
$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{I}$$
- **Autovectores de** $\mathbf{T}$ $\equiv$ **ejes principales** de $\mathbf{T}$
  - Dos tensores simétricos de 2º orden $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ con los mismos ejes principales se dicen **coaxiales**
- **Autovalores de** $\mathbf{T}$ $\equiv$ **valores principales** de $\mathbf{T}$

Ejercicio

Mostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son valores principales de $\mathbf{T}$, los invariantes principales resultan

$$I_1(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$I_2(\mathbf{T}) = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2$$
$$I_3(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Ejercicio

Mostrar que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son coaxiales si $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$.

Tensores definidos/semidefinidos positivos

- Un tensor $\mathbf{T}$ de 2º orden se dice **definido positivo** si $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{Tv}) > 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \ \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$
- Un tensor $\mathbf{T}$ de 2º orden se dice **semidefinido positivo** si $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{Tv}) \geq 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \ \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, con al menos un $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ para el que valga la igualdad
- Si $\mathbf{T}$ es simétrico y definido positivo, luego $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$
- Si $\mathbf{T}$ es simétrico y semidefinido positivo, luego $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$, con algún $\lambda_i = 0$

- Definimos la **raíz positiva** de $\mathbf{T}$ como

$$\mathbf{T}^{1/2} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{1/2} \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)}$$

- Si $\lambda_i > 0, \ i = 1, 2, 3$, la **inversa** de $\mathbf{T}$ existe y su representación espectral es:

$$\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-1} \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)}$$

- Notar que $\mathbf{T}^{1/2}$ y $\mathbf{T}^{-1}$ son coaxiales con $\mathbf{T}$

Tensores antisimétricos de 2º orden

- Sea $\mathbf{W}$ antisimétrico de 2º orden:

$$\mathbf{W}^T = -\mathbf{W} \tag{37}$$

Sus invariantes principales resultan

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{W}) &= \operatorname{tr}\mathbf{W} = 0 \\ I_2(\mathbf{W}) &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{W})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{W}^2\right] = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{W}^2 \\ &= -\frac{1}{2}W_{ij}W_{ji} = \frac{1}{2}W_{ij}W_{ij} = W_{12}^2 + W_{23}^2 + W_{31}^2 \\ I_3(\mathbf{W}) &= \det\mathbf{W} = 0 \end{aligned}$$

- La ecuación característica resulta:

$$\lambda^3 + I_2(\mathbf{W})\lambda = \left[\lambda^2 + I_2(\mathbf{W})\right]\lambda = 0$$

Como $I_2(\mathbf{W}) > 0\ \forall \mathbf{W} \neq \boldsymbol{0}$, $\mathbf{W}$ tiene un único autovalor real $\lambda_1 = 0$, al que corresponde el autovector $\mathbf{v}^{(1)}$ t.q.

$$\mathbf{W}\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{o}$$

- Si $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{kj}\mathbf{e}_i$ es **vector axial** de $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W}\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{o}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}^{(1)} = \alpha\mathbf{w}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, es el único autovector real de $\mathbf{W}$

Ejercicio

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *y* $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ *una base ortonormal, con* $\mathbf{w}$ *vector axial de* $\mathbf{W}$*. Mostrar:*

$$\mathbf{W} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}\mathbf{u})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

Deducir además que

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}\mathbf{u}) \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes (\mathbf{W}\mathbf{u})$$

Tensores ortogonales de 2º orden

- En general, el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ no se conserva bajo la transformación lineal $\mathbf{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, i.e.:

$$(\mathbf{Tu}) \cdot (\mathbf{Tv}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{Tv}) \neq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{en general}$$

- Se denomina **tensor ortogonal Q** a aquél que conserva el producto escalar:

$$(\mathbf{Qu}) \cdot (\mathbf{Qv}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{Qv}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

  de donde

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \tag{38}$$

- $\mathbf{Q}$ será propio o impropio según

$$\det \mathbf{Q} = \begin{cases} 1 & \textbf{tensor ortogonal propio} \\ -1 & \textbf{tensor ortogonal impropio} \end{cases}$$

Tensores ortogonales de 2º orden

De (38):

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^T$$
$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = -(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I})$$

- Para $\mathbf{Q}$ propia, tomando determinante obtenemos:

$$\det(\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{I})) = -\det(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I})$$
$$\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I})$$
$$\Longrightarrow \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ es autovalor, al que corresponde el autovector $\mathbf{u}$ t.q.

$$\mathbf{Qu} = \mathbf{u}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ no se modifica por aplicación de $\mathbf{Q}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ es **eje de rotación**

- $\mathbf{Q}$ impropia también tiene a autovalor $\lambda = 1$.

Tensores ortogonales de 2º orden

- Si $\mathbf{u}$ (autovector de $\mathbf{Q}$ para el autovalor $\lambda = 1$), $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ forman una base ortonormal:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{u}) &= (\mathbf{Q}\mathbf{v})\cdot(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \ \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{v} \text{ y } \mathbf{Q}\mathbf{u} \text{ ortogonales} \\ &= (\mathbf{Q}\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} \ \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{v} \text{ y } \mathbf{u} \text{ ortogonales} \\ 0 = \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{u}) &= (\mathbf{Q}\mathbf{w})\cdot(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \ \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{w} \text{ y } \mathbf{Q}\mathbf{u} \text{ ortogonales} \\ &= (\mathbf{Q}\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} \ \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{w} \text{ y } \mathbf{u} \text{ ortogonales} \end{aligned}$$

- Para $\mathbf{Q}$ propia, por (13) sabemos que $\exists\theta$ t.q.

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{w}\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \mathbf{Q}\mathbf{w} = -\mathbf{v}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{w}\cos\theta$$

con lo cual $\mathbf{Q}$ resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{I} &= \mathbf{Q}\left(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + \mathbf{w}\otimes\mathbf{w}\right) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{Q}\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} \\ &= \mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + (\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + \mathbf{w}\otimes\mathbf{w})\cos\theta + (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v} - \mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (39) \end{aligned}$$

Ejercicio

Usando (39), mostrar:

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cos\theta + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}(1-\cos\theta) + \mathbf{u}\times\mathbf{a}\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \forall\mathbf{a}\in\mathbb{E}$$

Si $\mathbf{U}$ *es un tensor antisimétrico de* 2^o *orden con vector axial* $\mathbf{u}$, *mostrar:*

$$\mathbf{Q} = \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{U}$$

Ejercicio

Mostrar que los invariantes principales de $\mathbf{Q}$ *ortogonal son*

$$I_1(\mathbf{Q}) = I_2(\mathbf{Q}) = 1 + 2\cos\theta, \qquad I_3(\mathbf{Q}) = 1$$

Obtener la ecuación característica y ver que existe un único autovalor real.

Campos tensoriales

Dominio $\mathcal{D}$: subconjunto abierto del espacio Euclídeo de puntos $\mathcal{E}$.

Campo: función $f(x)$ que depende de la posición $x \in \mathcal{D}$.

- **Campo escalar:** función $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$
- **Campo vectorial:** función $\mathbf{v} : \mathcal{D} \to \mathbb{E}$
- **Campo tensorial de 2º orden:** función $\mathbf{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$
- **Campo tensorial de orden** n**:** función $\mathbf{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{n \text{ veces}})$

Genéricamente:

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{I} \ \textbf{(Imagen)} \qquad \text{con} \ \begin{cases} f = \phi, \mathbf{v}, \mathbf{T} \\ \mathcal{I} = \mathbb{R}, \mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}), \mathcal{L}(\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}) \end{cases} \tag{40}$$

- Asumiremos o fijo y único (punto origen), así que a cada $x \in \mathcal{E}$ corresponde $!\mathbf{x} \in \mathbb{E}$. Luego, indicamos la posición de un punto en $\mathcal{D}$ como $x \in \mathcal{D}$ o $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, indistintamente.

Continuidad de campos tensoriales

- Un campo f es **continuo** en $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ si $\forall \varepsilon > 0$, existe un escalar $\delta(\varepsilon, \mathbf{x}) > 0$ t.q.:

$$d_{\mathcal{I}}(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x})) < \varepsilon \text{ siempre que } d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < \delta(\varepsilon, \mathbf{x})$$

d y $d_{\mathcal{I}}$: métricas asociadas con $\mathcal{E}$ e $\mathcal{I}$.

Ejemplo

Para $\mathcal{I} \equiv \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$*, se puede definir el producto escalar* $\mathbf{S} : \mathbf{T} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}\mathbf{T}^T)$*, el módulo* $|\mathbf{S}|_{\mathcal{I}} = \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}$*, y luego la distancia*

$$d_{\mathcal{I}}(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = |\mathbf{S} - \mathbf{T}|_{\mathcal{I}}$$

- Si f es continua $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, f es **continua** en $\mathcal{D}$.

Diferenciabilidad de campos tensoriales

- Un campo f es **diferenciable** en $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ si existe un único mapeo lineal $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ t.q.

$$\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{a} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x} + t\mathbf{a})\Big|_{t=0}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}$$

- Si f es diferenciable $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, f es **diferenciable en** $\mathcal{D}$.
- Si f es un campo tensorial de orden n, luego $\mathbf{G}$ es un campo tensorial de orden $n+1$.

Gradiente de campos tensoriales

- $\mathbf{G}$ es llamado **gradiente de** f y escribimos $\mathbf{G} \equiv \operatorname{grad} f$:

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}))\mathbf{a} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})}{t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}+t\mathbf{a})\bigg|_{t=0}, \qquad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E} \qquad (41)\end{aligned}$$

- Notar que si $\mathbf{a}$ es unitario, $(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}))\mathbf{a}$ es la **derivada direccional de** f en la dirección $\mathbf{a}$ calculada en $\mathbf{x}$.

Gradiente de campos escalares

- Para un **campo escalar** ϕ, grad $\phi = \nabla\phi$ es el campo vectorial t.q.

$$(\nabla\phi(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{a} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\mathbf{x}+t\mathbf{a})\right|_{t=0}, \quad \forall\mathbf{a}\in\mathbb{E} \tag{42}$$

En componentes cartesianas:

$$(\nabla\phi)\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}a_i$$

Gradiente y divergencia de campo vectorial

- **Gradiente de un campo vectorial $\mathbf{v}$:** campo tensorial $\operatorname{grad}\mathbf{v} = \nabla \otimes \mathbf{v}$ de 2º orden dado por

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}))\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(\mathbf{x} + t\mathbf{a})\bigg|_{t=0}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}$$

  En componentes cartesianas:

$$[\nabla \otimes \mathbf{v}]_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \equiv v_{i,j}$$

- **Divergencia de $\mathbf{v}$:** campo escalar dado por

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla \otimes \mathbf{v})$$

  En componentes cartesianas:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv v_{i,i}$$

  (contracción del campo tensorial $\nabla \otimes \mathbf{v}$)

Rotor de campo vectorial

- **Rotor de v:** campo vectorial dado por

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{a} \equiv (\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{a} = \nabla\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{x})\times\mathbf{a}), \quad \forall\mathbf{a}\in\mathbb{E}$$

En componentes cartesianas:

$$[\nabla\times\mathbf{v}]_k\, a_k = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v}\times\mathbf{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{ijk} v_j a_k) = (\varepsilon_{kij} v_{j,i})\, a_k$$

$$\Longrightarrow [\nabla\times\mathbf{v}]_k = \varepsilon_{kij} v_{j,i} = \varepsilon_{kij}\,[\nabla\otimes\mathbf{v}]_{ji}$$

Ejercicio

Demostrar que $\nabla \times \mathbf{v}$ *es el vector axial del tensor* $\nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T$. *Luego demostrar que* $\nabla \times \mathbf{v}$ *puede definirse alternativamente por la identidad*

$$\{\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})\} \times \mathbf{a} = \left\{\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}) - (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}))^T\right\}\mathbf{a}, \qquad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}$$

Ejercicio

Si ϕ *es campo escalar, mostrar que* $\nabla \times (\nabla\phi) = \boldsymbol{0}$.

Ejercicio

Mostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}$ *campo vectorial.*

Gradiente de campos tensoriales de orden n

- Para un **campo tensorial T** de orden n, grad $\mathbf{T} = \nabla \otimes \mathbf{T}$ es un campo tensorial de orden $n+1$ t.q.:

$$(\nabla \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}))\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}(\mathbf{x} + t\mathbf{a})\bigg|_{t=0}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E} \tag{43}$$

En componentes cartesianas:

$$[\nabla \otimes \mathbf{T}]_{i_1 i_2 \ldots i_n j} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{\partial x_j} \equiv T_{i_1 i_2 \ldots i_n, j}$$

Divergencia de tensores de 2º orden

- Si $\mathbf{T}$ es un campo tensorial de 2º orden, $\nabla \otimes \mathbf{T}$ es un campo tensorial de orden 3 con tres contracciones posibles:
    1. $\operatorname{div} \mathbf{T} \equiv \nabla \cdot \mathbf{T}$
    2. $\operatorname{div} \mathbf{T}^T \equiv \nabla \cdot \mathbf{T}^T$
    3. $\operatorname{grad}(\operatorname{tr} \mathbf{T}) \equiv \nabla(\operatorname{tr} \mathbf{T})$
- Es una cuestión de convención decidir cual de las dos contracciones posibles entre ∇ y $\mathbf{T}$ es $\nabla \cdot \mathbf{T}$. Asumimos:

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E} \tag{44}$$

En componentes cartesianas:

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_j \, a_j = \frac{\partial}{\partial x_i} [\mathbf{Ta}]_i = T_{ij,i} a_j$$

$$\Longrightarrow [\nabla \cdot \mathbf{T}]_j = T_{ij,i} \quad \Longrightarrow \left[\nabla \cdot \mathbf{T}^T\right]_j = T_{ji,i}$$

Ejercicio

Mostrar:

$$\nabla \otimes (\phi \mathbf{T}) = \phi \nabla \otimes \mathbf{T} + \mathbf{T} \otimes \nabla \phi$$

Si $\mathbf{T}$ *es un campo tensorial de 2º orden, deducir*

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{T}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \nabla \phi$$

Además:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathrm{tr}\{\mathbf{T}(\nabla \otimes \mathbf{v})\}$$

con $\mathbf{v}$ *campo vectorial.*

Ejercicio

Sea el campo tensorial de 2º orden:

$$\mathbf{S} = -\phi \mathbf{I} + \alpha\{\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T\}$$

donde ϕ es un campo escalar, $\mathbf{v}$ es un campo escalar tal que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es constante.

Mostrar:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\nabla\phi + \alpha\nabla^2\mathbf{v}$$
$$\nabla(\operatorname{tr}\mathbf{S}) = -3\nabla\phi$$

Integración de campos tensoriales

- Si $\mathbf{T}$ es un campo tensorial de orden n, su integral es el campo tensorial de orden n:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} \, \mathrm{d} V = \left(\int_{\mathcal{D}} T_{i_1 i_2 \dots i_n} \, \mathrm{d} V \right) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \tag{45}$$

$\Rightarrow$ Para calcular la integral de un campo tensorial, es suficiente calcular las integrales de sus componentes (campos escalares).

Teorema de Gauss

- Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ es un dominio con frontera cerrada $\mathcal{S}$ de normal unitaria saliente $\mathbf{n}$ y f es un campo con derivadas continuas en $\mathcal{D}$ y continuo en $\mathcal{S}$, resulta:

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{grad} f \, \mathrm{d}\, V = \int_{\mathcal{S}} f \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S \tag{46}$$

- Para un campo tensorial $\mathbf{T}$ de orden n:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \otimes \mathbf{T} \, \mathrm{d}\, V = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T} \otimes \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S \tag{47}$$

En componentes cartesianas:

$$\int_{\mathcal{D}} T_{i_1 i_2 \ldots i_n, j} \, \mathrm{d}\, V = \int_{\mathcal{S}} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} n_j \, \mathrm{d}\, S \tag{48}$$

Ejercicio

Si $\mathbf{T}$ *es un campor tensorial de 2º orden simétrico y* $\mathbf{w}$ *es un campo vectorial, ambos suficientemente suaves en* $\mathcal{D}$*, demostrar :*

$$\int_{\mathcal{D}} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} \, \mathrm{d}\, V = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, \mathrm{d}\, S - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} : \nabla \otimes^{s} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\, V$$

donde $\mathcal{S}$ *es la frontera de* $\mathcal{D}$ *con normal saliente unitaria* $\mathbf{n}$, $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ *y* $\nabla \otimes^{s} \mathbf{w}$ *es la parte simétrica de* $\nabla \otimes \mathbf{w}$.