Mecánica de Sólidos

Capítulo IV: Elasticidad

Víctor Fachinotti, Juan C. Álvarez Hostos

Programa de Doctorado en Ingeniería
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)

2 de octubre de 2018

Ecuaciones constitutivas

- Las ecuaciones de campo Eulerianas o Lagrangianas en $\mathbb{R}^3$ proporcionan 4 ecuaciones escalares de gobierno:
  - 3 ecuaciones de movimiento
  - 1 ecuación de conservación de masa
- Pero tenemos 10 incógnitas escalares:
  - 3 componentes de posición o velocidad
  - 6 componentes independientes de tensión simétrica
  - densidad
- La descripción hasta aquí está incompleta pues no hay manera de distinguir, por ej., sólido de líquido o goma de acero.
- La descripción se completa con las **leyes constitutivas**, que describen macroscópicamente el material en cuestión.

Ecuaciones constitutivas

- Si se conoce la tensión de Cauchy $\mathbf{T}$ al instante t en cualquier punto del material y para cualquier movimiento, luego la relación entre $\mathbf{T}$ y la historia de movimiento hasta t (incluso) describe la respuesta del material a un movimiento arbitrario. Dicha relación se denomina **ecuación constitutiva**.
- **Hipótesis I: Principio de determinismo para las tensiones:** un material puede ser caracterizado por el conocimiento de $\mathbf{T}$.

- Sea el movimiento de un cuerpo B para un observador O:

$$\mathbf{x} = \chi(X, t) \qquad \forall X \in B$$

- Sea χ^t la historia del movimiento hasta t:

$$\chi^t(X, s) = \chi(X, t - s) \qquad 0 \leq s \leq t$$

- La **ecuación constitutiva** especifica cómo $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ depende de χ^t:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}(\chi^t; X, t) \tag{1}$$

- $\mathbf{G}$ es el **funcional de respuesta**, que es un funcional respecto de χ^t y una función respecto de X y t.
- **Nota:** En general, χ^t no está restringido a X, así que la historia de movimiento de todo el cuerpo B puede contribuir a la tensión en cada uno de sus puntos materiales.

Principio de objetividad material

- **Hipótesis II: Principio de objetividad material:** dos observadores en movimiento relativo hacen deducciones equivalentes (matemáticas y físicas) sobre las propiedades del material en observación.
- El observador O^*, definido por la transformación

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t), \qquad t^* = t - a$$

percibe el movimiento

$$\mathbf{x}^* = \chi^*(X, t^*) = \mathbf{Q}(t)\chi(X, t) + \mathbf{c}(t) \qquad t^* = t - a, \ \forall X \in B$$

y la tensión de Cauchy:

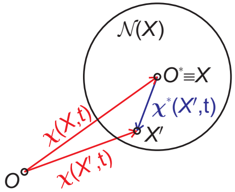
$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t)$$

- El principio de objetividad material implica

$$\mathbf{T}^*(\chi^*(X, t^*), t^*) = \mathbf{G}(\chi^{*t^*}; X, t^*) \qquad \forall O^*$$

Principio de acción local

- Sea X' un punto material en el entorno $\mathcal{N}(X)$ del punto material arbitrario $X \in B$.
- Supongamos que el observador O^* se mueve con X, y elige X como origen y $t^* = t$, entonces



$$\chi^*(X', t) = \chi(X', t) - \chi(X, t) \equiv \chi_X(X', t), \quad \forall t, \ \forall X' \in \mathcal{N}(X)$$

χ_X: **localización del movimiento** en $\mathcal{N}(X)$.

- **Hipótesis III: Principio de acción local**: la historia del movimiento fuera de $\mathcal{N}(X)$ no afecta la respuesta del material en X, o sea

$$\mathbf{T}(\chi(X, t), t) = \mathbf{G}(\chi_X^t; X, t)$$

Movimiento localmente homogéneo

- Elegimos una configuración de referencia $\mathcal{B}_0$ e identificamos a X con $\mathbf{X} = \chi_0(X)$:
$$\chi_X^t(\mathbf{X}', s) = \chi^t(\mathbf{X}', s) - \chi^t(\mathbf{X}, s)$$
Por la regularidad del movimiento en $\mathcal{N}(X)$:
$$\chi_X^t(\mathbf{X}', s) \approx \left[\operatorname{Grad} \chi_X^t(\mathbf{X}, s)\right] (\mathbf{X}' - \mathbf{X}) \qquad (2)$$
- Luego, la historia de movimiento en $\mathcal{N}(X)$ está gobernada por la historia $\operatorname{Grad} \chi_X^t$ en X con respecto a una configuración de referencia elegida arbitrariamente. El movimiento se dice entonces **localmente homogéneo** en $\mathcal{N}(X)$.

Materiales simples

- **Material simple** en X: si su respuesta a toda deformación en X está determinada de manera única por su respuesta a deformaciones homogéneas en $\mathcal{N}(X)$. Para este material, la deformación en $\mathcal{N}(X)$ está determinada por $\operatorname{Grad}\chi^t_X$ respecto a la configuración de referencia χ_0, y su ecuación constitutiva resulta

$$\mathbf{T}(\chi(\mathbf{X},t),t) = \mathbf{G}_0(\operatorname{Grad}\chi^t_X;\mathbf{X},t) \tag{3}$$

  (el subíndice 0 recuerda la dependencia de la configuración de referencia elegida)

- El concepto de **material simple** es una idealización basada en las hipótesis de **objetividad material** y **acción local**. No obstante, incluye todas las leyes constitutivas puramente mecánicas usadas en Física e Ingeniería (por ej., fluido newtoniano y sólido elástico lineal).

Objetividad en materiales simples

- Para un material simple, objetividad material implica

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}_0(\mathbf{A}^t;\mathbf{X},t)\mathbf{Q}^T(t)=\mathbf{G}_0(\mathbf{Q}^t\mathbf{A}^t;\mathbf{X},t)$$

  donde $\mathbf{A}^t=\operatorname{Grad}\chi^t_X$, $\mathbf{Q}^t(s)=\mathbf{Q}(t-s)$.

- Como (3) vale para elección arbitraria de configuración de referencia:

$$\mathbf{G}_{0'}(\mathbf{A}'^t;\mathbf{X}',t)=\mathbf{G}_0(\mathbf{A}^t;\mathbf{X},t)$$

  $\forall$ cambio de configuración de referencia $\chi_0\to\chi_0'$, donde $\mathbf{X}'=\chi_0'(X)$, $\mathbf{A}'^t$ es el gradiente de deformación relativo a χ_0' y el subíndice $0'$ recuerda que el funcional depende de χ_0'.

Material elástico de Cauchy

- **Material elástico de Cauchy**: material **simple** donde cada partícula tiene un estado de tensión en la configuración actual totalmente determinado por el estado de deformación en esa configuración relativa a una configuración de referencia arbitraria.
- La tensión de Cauchy en un material elástico de Cauchy no depende del camino de deformación desde la configuración de referencia.

Material elástico de Cauchy

- Como la respuesta tensional de un material elástico de Cauchy en una configuración dada no depende del tiempo en que se alcanza dicha configuración, escribimos su ecuación constitutiva como

$$\mathbf{T}(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{G}_0(\mathbf{A}, \mathbf{X})$$

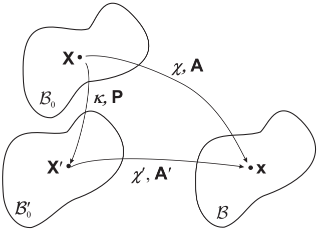
Para simplificar la notación, escribiremos

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{A})$$

- $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_0$: **función de respuesta del material elástico de Cauchy** con respecto a la configuración de referencia $\mathcal{B}_0$.
- $\mathbf{G}$ es una aplicación del espacio de tensores $\mathbf{A}$ de 2º orden invertibles de 2 puntos en el espacio de tensores $\mathbf{T}$ de 2º orden simétricos Eulerianos.

Respuesta ante cambio de configuración de referencia

- Cambiemos la configuración de referencia $\mathcal{B}_0$ por $\mathcal{B}'_0$:



$$\mathbf{X}' = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{X})$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$$
$$\mathbf{P} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{X})$$

- Como las propiedades materiales son independientes de la configuración de referencia:

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{G}_0(\mathbf{A}) = \mathbf{G}_{0'}(\mathbf{A}') = \mathbf{G}_{0'}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})$$

$\forall$ gradiente de deformación $\mathbf{A}$

- Esta regla define cómo cambia $\mathbf{G}$ con la configuración de referencia, sin imponer restricciones sobre $\mathbf{G}$.

Objetividad en materiales elásticos de Cauchy

- Bajo un cambio de observador de O a O^*:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$$

- La objetividad material implica independencia de las propiedades del material respecto del observador, de modo que la función $\mathbf{G}$ es la misma para todo observador:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* =& \mathbf{G}(\mathbf{A}^*) = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A}) = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T \\ \Rightarrow & \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A}) = \mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T \\ & \forall \mathbf{Q} \in SO3, \ \forall \text{ gradiente de deformación } \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{4}$$

- La ecuación (4) impone restricciones a $\mathbf{G}$ a fin de garantizar objetividad material.

Ecuación constitutiva para la tensión nominal

- Para la tensión nominal $\mathbf{S}$, tenemos

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T} = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{A})$$

- La simetría de $\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ impone la restricción:

$$\mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{H}^{T}(\mathbf{A})\mathbf{A}^{T} \tag{5}$$

con $\mathbf{H}^{T}(\mathbf{A}) \equiv [\mathbf{H}(\mathbf{A})]^{T}$.

- La objetividad material impone la restricción:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{Q}\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{Q}\mathbf{A})(\mathbf{Q}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A}) \\ &= \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^{T} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^{T} \end{aligned} \tag{6}$$

para todo $\mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$.

Ecuación constitutiva para la tensión nominal

- Haciendo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ en la restricción de objetividad (6), tenemos

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}^T\mathbf{A})\mathbf{R}^T = \mathbf{H}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T$$

sujeta a la restricción (5) de simetría de $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{RUH}(\mathbf{RU}) &= \mathbf{H}^T(\mathbf{RU})\mathbf{UR}^T \\
\mathbf{RUH}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T &= \left[\mathbf{H}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T\right]^T\mathbf{UR}^T = \mathbf{RH}^T(\mathbf{U})\mathbf{UR}^T \\
\Rightarrow\ \mathbf{UH}(\mathbf{U}) &= \mathbf{H}^T(\mathbf{U})\mathbf{U}
\end{aligned}$$

Formas alternativas de la ecuación constitutiva

- Para el tensor de Biot $\mathbf{T}^{(1)}$, conjugado de la deformación $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{S}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}(\mathbf{U}) + \mathbf{H}^T(\mathbf{U})\right)\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{I}) + \mathbf{H}^T(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{I})\right)}_{\equiv \mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)})}\end{aligned}$$

- Para el 2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff $\mathbf{T}^{(2)}$, conjugado de la deformación $\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{(2)} &= \mathbf{B}^T\hat{\mathbf{T}}\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{S}(\mathbf{A}^{-1})^T\\ &= \mathbf{S}\left[(\mathbf{R}\mathbf{U})^{-1}\right]^T = \mathbf{S}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}\\ &= \mathbf{H}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{H}(\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1} \equiv \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{E}^{(2)})\end{aligned}$$

Forma general de la ecuación constitutiva

- **Ecuación constitutiva para el par conjugado Lagrangiano** $(\mathbf{T}^{(m)}, \mathbf{E}^{(m)})$:

$$\mathbf{T}^{(m)} = \mathbf{G}^{(m)}(\mathbf{E}^{(m)})$$

con $\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$ y $\mathbf{E}^{(m)} = \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I})$ para $m \neq 0$.

- **Ecuación constitutiva para el par conjugado Lagrangiano general** $(\mathbf{T}^{\mathbf{F}}, \mathbf{F})$:

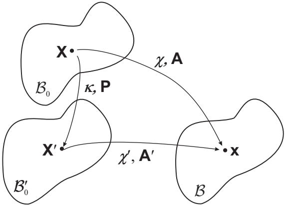
$$\mathbf{T}^{\mathbf{F}} = \mathbf{G}^{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$$

con $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{3} f(\lambda_i)\mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)}$

Simetría material

- Las restricciones impuestas por la objetividad material se aplican a todos los materiales, incluidos los materiales elásticos de Cauchy.
- Hay restricciones adicionales para materiales elásticos de Cauchy que exhiben simetrías en alguna configuración de referencia.

- La respuesta del material es independiente de la configuración de referencia:



$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{G}'(\mathbf{A}') = \mathbf{G}'(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}) \quad \forall \text{ gradiente de deformación } \mathbf{A} \tag{7}$$

$\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_0$: función de respuesta del material respecto de $\mathcal{B}_0$

$\mathbf{G}' \equiv \mathbf{G}_{0'}$: función de respuesta del material respecto de $\mathcal{B}'_0$

Grupo de simetría

- Supongamos que en un ensayo mecánico y para un cierto $\mathbf{P}$, la respuesta del material relativa a $\mathcal{B}_0'$ es indistinguible de aquélla relativa a $\mathcal{B}_0$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) \qquad \forall \text{ gradiente de deformación } \mathbf{A}$$

- Se define el **grupo de simetría** $\mathcal{G}$ de un material elástico de Cauchy relativo a la configuración de referencia $\mathcal{B}_0$ como el conjunto de tensores invertibles de 2º orden $\mathbf{K}$ t.q.

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{K}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) \quad \forall \text{ gradiente de deformación } \mathbf{A} \tag{8}$$

- Se verifica que $\mathcal{G}$ es un grupo, pues $\forall \mathbf{K}, \bar{\mathbf{K}} \in \mathcal{G}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{K}\bar{\mathbf{K}}) &= \mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{K}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) && \Rightarrow \ \mathbf{K}\bar{\mathbf{K}} \in \mathcal{G} \\
\mathbf{G}(\mathbf{A}) &= \mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}) && \Rightarrow \ \mathbf{K}^{-1} \in \mathcal{G} \\
\mathbf{G}(\mathbf{A}) &= \mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{I}) && \Rightarrow \mathbf{I} \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

Regla de Noll

- La respuesta de cualquier material (isótropo o no) no es afectada por un cambio de configuración de referencia $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0'$ (con $\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$):

$$\mathbf{G}'(\mathbf{A}') = \mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}'\mathbf{P}) \tag{9}$$

- Para cualquier tensor de 2º orden invertible $\mathbf{K} \in \mathcal{G}$, debe verificarse:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{A}'\mathbf{P}) &= \mathbf{G}((\mathbf{A}'\mathbf{P})\mathbf{K}) = \mathbf{G}((\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{P}) \\ &= \mathbf{G}'(\mathbf{A}'(\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}))\end{aligned} \tag{10}$$

- Por (9) y (10):

$$\mathbf{G}'(\mathbf{A}') = \mathbf{G}'(\mathbf{A}'(\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}))$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} \in \mathcal{G}'$: grupo de simetría del material respecto de $\mathcal{B}_0'$.

Regla de Noll

- En la teoría de grupos, se dice que $\mathcal{G}'$ es el grupo conjugado de $\mathcal{G}$ respecto de $\mathbf{P}$, y se representa:

$$\mathcal{G}' = \mathbf{P}\mathcal{G}\mathbf{P}^{-1} \qquad \textbf{(Regla de Noll)} \tag{11}$$

- Casos especiales:
  1. Si $\mathbf{P} \in \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.
  2. Si $\mathbf{P}$ es una dilatación pura (i.e., $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{I}$, con α escalar positivo), entonces también $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$. Por lo tanto, el grupo de simetría de un material elástico de Cauchy no se ve afectado por un cambio de configuración de referencia correspondiente a una dilatación pura arbitraria.

Simetría deformacional

- Recordemos que $\mathbf{G}$ está restringido al conjunto de gradientes de deformación relativos a la configuración $\mathcal{B}_0$, i.e., al conjunto de tensores de 2º orden con determinante positivo.
- Si aplicamos una restricción similar a los elementos de $\mathcal{G}$:

$$\det \mathbf{K} > 0 \qquad \forall \mathbf{K} \in \mathcal{G} \tag{12}$$

hablamos de **simetría deformacional**.

Sólido elástico isótropo

- **Sólido elástico isótropo**: material elástico cuyo grupo de simetría $\mathcal{G}$ es el **grupo ortogonal propio**

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{K} : \mathbf{K}\mathbf{K}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{K} = 1\} \equiv \mathrm{SO3}$$

  al menos para una configuración de referencia, llamada **configuración no distorsionada**.
  - En la configuración no distorsionada, la respuesta mecánica de este material no exhibe una dirección preferencial, y es esta propiedad la que caracteriza la isotropía.
- **Configuración natural**: Configuración no distorsionada y libre de tensiones, i.e., la función de respuesta $\mathbf{G}$ relativa a esa configuración verifica

$$\mathbf{G}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

Objetividad e isotropía

- Hagamos $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{K} = \mathbf{Q} \in SO3$ en las restricciones de simetría y de objetividad material:

$$\left.\begin{array}{llll} \mathbf{G}(\mathbf{AK}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) & \text{(simetría)} & \Rightarrow & \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{G}(\mathbf{I}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{QA}) = \mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T & \text{(objetividad)} & \Rightarrow & \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{QG}(\mathbf{I})\mathbf{Q}^T \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{G}(\mathbf{I}) = \mathbf{QG}(\mathbf{I})\mathbf{Q}^T \tag{13}$$

$\Rightarrow$ **Restricción simultánea de objetividad material e isotropía**: la tensión de Cauchy $\mathbf{G}(\mathbf{I})$ en la configuración de referencia $\mathcal{B}_0$ debe satisfacer (13) para todo tensor ortogonal propio $\mathbf{Q}$.

Función de respuesta de un sólido elástico isótropo

- Para un sólido isótropo elástico, por descomposición polar:

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{VR}) = \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \mathbf{G}(\mathbf{VQ}^T) \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$$

- Por la objetividad material (4):

$$\mathbf{G}(\mathbf{QVQ}^T) = \mathbf{QG}(\mathbf{V})\mathbf{Q}^T \tag{14}$$

  $\forall \mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$, $\forall$ tensor simétrico definido positivo $\mathbf{V}$.

- La ecuación (14) define $\mathbf{G}$ como la **función de respuesta de un material elástico isótropo** relativa a la configuración no distorsionada $\mathcal{B}_0$.
- Además, la ecuación (14) define $\mathbf{G}$ como una **función tensorial de 2º orden isótropa**.

Función tensorial isótropa

Ejemplo

Son funciones tensoriales isótropas los tensores de deformación

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \ln \mathbf{V}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \frac{1}{m}\left(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}\right), \qquad m = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \sum f(\lambda_i)\mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)}$$

donde $\mathbf{V}$ *es un tensor simétrico y definido positivo,* $(\lambda_i, \mathbf{v}^{(i)})$ *es autopar de* $\mathbf{V}$ *y* f *es una función escalar monótona creciente t.q.* $f(1) = 0$ *y* $f'(1) = 1$.

Función escalar isótropa

- **Función escalar isótropa**: función escalar ϕ definida sobre el espacio de tensores simétricos (definidos positivos) $\mathbf{V}$, t.q.

$$\phi(\mathbf{QVQ}^T) = \phi(\mathbf{V}) \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$$

- **Invariante escalar** de $\mathbf{V}$: $\phi(\mathbf{V})$
- **Teorema**: Sea ϕ una función escalar definida sobre el espacio de tensores simétricos definidos positivos. Luego, su valor $\phi(\mathbf{V})$ en $\mathbf{V}$ es un invariante escalar de $\mathbf{V}$ si y sólo si existe una función escalar $\hat{\phi}$ simétrica de los valores principales de $\mathbf{V}$ t.q.

$$\phi(\mathbf{V}) = \hat{\phi}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k), \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \text{ o permutación}) \qquad (15)$$

o, equivalentemente, existe una función $\varPhi$ de los invariantes principales de $\mathbf{V}$ t.q.

$$\phi(\mathbf{V}) = \varPhi(I_1, I_2, I_3)$$

Teoremas sobre funciones tensoriales isótropas

- **Teorema**: Si $\mathbf{G}$ es una función tensorial isótropa, los valores principales de $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ son escalares invariantes de $\mathbf{V}$.
- **Teorema**: Si $\mathbf{G}$ es una función tensorial isótropa, entonces $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ es coaxial con $\mathbf{V}$.
- **Teorema**: una función $\mathbf{G}$ cuyo valor es un tensor simétrico de 2º orden, y está definida en el espacio de tensores simétricos de 2º orden, es isotrópica si y sólo si puede representarse como

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{V} + \phi_2 \mathbf{V}^2$$

con ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 invariantes escalares de $\mathbf{V}$.

Ecuación constitutiva de un sólido elástico isótropo

- Si $\mathbf{V}$ es el tensor de estiramiento izquierdo, obtenemos la **ecuación constitutiva de un sólido elástico isótropo**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{V} + \phi_2 \mathbf{V}^2$$

  o, para las tensiones principales de Cauchy:

$$t_i = \phi_0 + \phi_1 \lambda_i + \phi_2 \lambda_i^2$$

  donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los estiramientos principales.

- Como ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 son invariantes escalares de $\mathbf{V}$, usando (15) resulta:

$$t_i = g(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = g(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_j) \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

  g: **función de respuesta escalar para un sólido elástico isótropo**

Ecuación constitutiva de un sólido elástico isótropo

- Físicamente, supongamos un cubo de material extraído de una probeta homogénea en una configuración no distorsionada, que es llevado a una máquina de ensayo que le aplica estiramientos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paralelos a las aristas del cubo.
- El material es isótropo si la tensión de Cauchy es coaxial con las aristas del cubo y las tensiones principales t_1, t_2, t_3 no dependen de la orientación original del cubo en la configuración no distorsionada.
- Luego, la función de respuesta g puede determinarse empíricamente a partir de los valores medidos de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y t_1, t_2, t_3.

Restricciones internas

- Supongamos la deformación sujeta a alguna restricción local como, por ej., en un material inextensible en alguna dirección o un material incompresible.
- La restricción local a la deformación se escribe:

$$C(\mathbf{A}) = 0 \tag{16}$$

donde C es una función suficientemente suave.

- A causa de la restricción, las componentes de $\mathbf{A}$ no son independientes.
- La restricción también actúa cuando el material se somete a una rotación, i.e. $C(\mathbf{A})$ es objetiva:

$$C(\mathbf{A}) = C(\mathbf{QA}) = 0 \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$$

Para $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$:

$$C(\mathbf{U}) = 0$$

Restricciones internas

- Hallamos la tasa de (16):

$$\dot{C} = \operatorname{tr}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mathbf{A}}\dot{\mathbf{A}}\right) = 0$$

- La densidad de potencia de tensiones resulta:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) &= \operatorname{tr}\left(\mathbf{H}(\mathbf{A})\dot{\mathbf{A}}\right) + q\operatorname{tr}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mathbf{A}}\dot{\mathbf{A}}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\left(\mathbf{H}(\mathbf{A}) + q\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mathbf{A}}\right)\dot{\mathbf{A}}\right) \qquad \forall q \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- Luego, en presencia de una restricción interna, la ecuación constitutiva para **S** debe escribirse

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) + q\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mathbf{A}} \tag{17}$$

Aquí, q juega el rol de un multiplicador de Lagrange.

Restricciones internas

- Similarmente, la ecuación constitutiva para la tensión de Cauchy $\mathbf{T}$ se escribe

$$\mathbf{T} = (\det \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \underbrace{(\det \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{A})}_{\mathbf{G}(\mathbf{A})} + \underbrace{(\det \mathbf{A})^{-1} q}_{\tilde{q}}\,\mathbf{A}\frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}\mathbf{A}} \qquad \forall \tilde{q} \in \mathbb{R} \quad (18)$$

Restricción de incompresibilidad

- La restricción de incompresibilidad se escribe

$$C(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\mathbf{A}} = \mathbf{B}^T$$

- La tensión nominal resulta

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) - p\mathbf{B}^T \qquad p\text{: presión hidrostática}$$

- La tensión de Cauchy resulta

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{A}) - p\mathbf{I}$$

Restricción de incompresibilidad para sólidos elásticos isótropos

- Si además tenemos un sólido elástico isótropo:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{V} + \phi_2 \mathbf{V}^2$$

  donde ϕ_1 y ϕ_2 son escalares invariantes de $\mathbf{V}$, i.e., funciones simétricas de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, con $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ por incompresiblidad.
- Para las tensiones principales de Cauchy:

$$t_i = -p + \underbrace{\phi_1 \lambda_i + \phi_2 \lambda_i^2}_{g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$$

Material elástico de Green

En general, $\nexists$ $W(\mathbf{A})$, función escalar de $\mathbf{A}$, t.q.

$$\dot{W} = \operatorname{tr}\left(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{H}(\mathbf{A})\dot{\mathbf{A}}\right) \tag{19}$$

i.e., $\operatorname{tr}\left(\mathbf{H}(\mathbf{A})\dot{\mathbf{A}}\right)$ no es generalmente una forma diferencial exacta.

- **Material elástico de Green o hiperelástico**: material elástico para el cual existe $W(\mathbf{A})$.

Material elástico de Green

- Siendo $W = W(\mathbf{A})$, su tasa resulta:

$$\dot{W} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})\dot{\mathbf{A}}\right) \tag{20}$$

  Como las componentes de $\dot{\mathbf{A}}$ son independientes (para un material sin restricciones internas), de (19) y (20) se deduce la ecuación constitutiva

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})$$

- **Nota:** esta es la definición clásica de $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$ como par conjugado.
- La Elasticidad de Green constituye un caso particular de la Elasticidad de Cauchy con $\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})$, de modo que todas las propiedades de $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ son válidas para $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})$.

Balance de energía mecánica

- Para un material hiperelástico, el **balance de energía mecánica (Lagrangiano)** toma la forma

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\chi}\, \mathrm{dV} + \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}^T\mathbf{N}) \cdot \dot{\chi} \mathrm{d}A}_{\text{potencia de las fuerzas aplicadas}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \dot{\chi} \cdot \dot{\chi} + W \right) \mathrm{dV}}_{\text{tasa de cambio de la energía mecánica total}}$$

Función de energía de deformación

- W es la energía almacenada en el material como resultado de la deformación, denominada **densidad de energía potencial, función de energía potencial elástica, función de energía elástica almacenada, función de energía de deformación**.
- Sabiendo que

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{T}^{(1)}\dot{\mathbf{U}})$$
$$\mathbf{T}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}(\mathbf{U}) + [\mathbf{H}(\mathbf{U})]^T\right) = \mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{U})$$

- Para la Elasticidad de Green:

$$\dot{W} = \mathrm{tr}(\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}) \quad \Rightarrow \quad \dot{W} \text{ es independiente de } \mathbf{R} \text{ y } \dot{\mathbf{R}}$$

de donde, tras integrar, se deduce:

$$W(\mathbf{A}) = W(\mathbf{U}) \quad \Rightarrow \quad W \text{ es independiente de } \mathbf{R} \tag{21}$$

Forma general de la ecuación constitutiva para materiales hiperelásticos

- Sea

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \ln(\mathbf{U}) & m = 0 \\ \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & m \neq 0 \end{cases}$$

- Ahora podemos expresar $W(\mathbf{U}) = W^{(m)}(\mathbf{E}^{(m)})$.
- La ecuación constitutiva de un material hiperelástico para la tensión $\mathbf{T}^{(m)}$ conjugada de $\mathbf{E}^{(m)}$ resulta

$$\mathbf{T}^{(m)} = \frac{\partial W^{(m)}}{\partial \mathbf{E}^{(m)}}(\mathbf{E}^{(m)})$$

- W constituye una función potencial para cada par conjugado $(\mathbf{T}^{(m)}, \mathbf{E}^{(m)})$ además de $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$.
- Este es un caso particular de material elástico de Cauchy con $\mathbf{G}^{(m)} = \partial W^{(m)} / \partial \mathbf{E}^{(m)}$.

Objetividad en materiales hiperelásticos

- Por (21), $W(\mathbf{A}) = W(\mathbf{U})\ \forall\mathbf{A}$ (y por lo tanto $\forall\mathbf{R} \in \mathrm{SO3}$). Luego:

$$W(\mathbf{QA}) = W(\mathbf{A}) \qquad \forall\mathbf{Q} \in \mathrm{SO3} \tag{22}$$

  (**objetividad material para materiales hiperelásticos**)
- La ecuación (22) define W como una **función objetiva** de $\mathbf{A}$.
- Tomando $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ en (22), tenemos:

$$W(\mathbf{Q}) = W(\mathbf{I}) \qquad \forall\mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$$

  i.e., W para cualquier rotación $\mathbf{Q}$ vale lo mismo que en la configuración de referencia. Por conveniencia, podemos suponer $W(\mathbf{I}) = 0$ sin afectar el balance de energía mecánica.

Grupos de simetría para materiales hiperelásticos

- **Grupo de simetría de un material hiperelástico**: Conjunto $\mathcal{G}^*$ de tensores invertibles $\mathbf{K}$ t.q.

$$W(\mathbf{A}) = W(\mathbf{AK}) \qquad \forall \text{ gradiente de deformación } \mathbf{A}$$

- Las propiedades elásticas de un material hiperelástico relativas a 2 configuraciones de referencia relacionadas por un elemento de $\mathcal{G}^*$ son indistinguibles, y la energía almacenada del material no se ve afectada por tal cambio de configuración de referencia

Relación entre grupos de simetría para materiales elásticos de Green y de Cauchy

- Para materiales elásticos de Cauchy, el grupo de simetría $\mathcal{G}$ relativo a alguna configuración de referencia es el conjunto de tensores invertibles $\mathbf{K}$ t.q.

$$\mathbf{G}(\mathbf{AK}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) \qquad \forall \text{ gradiente de deformación } \mathbf{A}$$

- Recordemos que una dilatación pura no altera el grupo de simetría. Luego, si $\mathbf{K} \in \mathcal{G}$ y $\alpha > 0$, $\alpha\mathbf{K} \in \mathcal{G}$.
- Siendo $\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}\, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{A})$, para $\mathbf{K} \in \mathcal{G}$ con $\det \mathbf{K} = 1$ resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{AK}) &= \det(\mathbf{AK})(\mathbf{AK})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{AK}) \\ &= \mathbf{K}^{-1} \det \mathbf{A}\, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Relación entre grupos de simetría para materiales elásticos de Green y de Cauchy

- Para materiales hiperelásticos, $\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})$, luego

$$\frac{\partial W}{\partial (\mathbf{AK})}(\mathbf{AK}) = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A}) \tag{23}$$

- Además, para $\mathbf{K}$ fijo, $\forall W, \mathbf{A}$, resulta:

$$\frac{\partial W}{\partial (\mathbf{AK})} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}} \tag{24}$$

- Luego, por (23) y (24):

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{AK}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A}) \tag{25}$$

Relación entre grupos de simetría para materiales elásticos de Green y de Cauchy

- Integrando (25):

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{I}}^{\mathbf{A}} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{AK})\,\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_{\mathbf{I}}^{\mathbf{A}} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A} \\
W(\mathbf{AK}) - W(\mathbf{K}) &= W(\mathbf{A}) - W(\mathbf{I}) \\
\Longrightarrow \quad W(\mathbf{AK}) &= W(\mathbf{A}) + W(\mathbf{K}) - W(\mathbf{I})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ En general, el grupo de simetría $\mathcal{G}$ de un material elástico de Cauchy no es grupo de simetría de un material hiperelástico.

Materiales hiperelásticos isótropos

- **Material hiperelástico isótropo**: aquél cuyo grupo de simetría es el grupo ortogonal propio, luego:

$$W(\mathbf{AQ}) = W(\mathbf{A}) \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$$

- Además, debe verificar objetividad:

$$W(\mathbf{QA}) = W(\mathbf{A}) \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{SO3}$$

- Luego:

$$W(\mathbf{QA}) = W(\mathbf{QVR}) = \underline{W(\mathbf{V}) = W(\mathbf{QVQ}^T)} \tag{26}$$

$$W(\mathbf{QA}) = W(\mathbf{QRU}) = \underline{W(\mathbf{U}) = W(\mathbf{QUQ}^T)} \tag{27}$$

Materiales hiperelásticos isótropos

- Las ecuaciones (26) y (27) definen W como una función escalar isótropa de $\mathbf{V}$ y de $\mathbf{U}$, i.e.,

$$W(\mathbf{V}) = W(\mathbf{U}) = W(I_1, I_2, I_3) = W(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$$
$$i, j, k = 1, 2, 3 \text{ o permutación}$$

donde λ_i son los valores principales de $\mathbf{V}$ (y de $\mathbf{U}$) e I_i son los invariantes principales de $\mathbf{V}$ (y de $\mathbf{U}$).

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos

- Sea W función de los invariantes principales de $\mathbf{V}^2$ ($I_i = I_i(\mathbf{V}^2)$):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} c_{pqr}(I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q (I_3 - 1)^r \tag{28}$$

- $W = 0$ en la configuración de referencia ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, luego $I_1 = I_2 = 3$, $I_3 = 1$) si $c_{000} = 0$.
- La configuración de referencia es libre de tensiones si

$$t_i = \frac{1}{J}\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\bigg|_{(3,3,1)} = 0 \Rightarrow c_{100} + 2c_{010} + c_{001} = 0$$

- Se trata de determinar p, q, r más pequeños (en general distintos entre sí) que permitan un ajuste aceptable de la curva $t_i = g(I_1, I_2, I_3)$ obtenida de ensayo del material.

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos

Ejemplo

- *Suponiendo* $c_{pqr} = 0$ *para* $r = 1, 2, \ldots$ *y* $c_{pqr} = 0$ *para* $p, q = 1, 2, \ldots$*:*

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{pq0}(I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q + \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} c_{00r}(I_3 - 1)^r}_{g(I_3)} \tag{29}$$

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos

- Sea W función de los estiramientos principales λ_i:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} a_{pqr} \Big\{ \big[\lambda_1^p(\lambda_2^q + \lambda_3^q) + \lambda_2^p(\lambda_3^q + \lambda_1^q) \\ + \lambda_3^p(\lambda_1^q + \lambda_2^q) \big] (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^r - 6 \Big\} \quad (30)$$

que se anula en la configuración de referencia.

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos

Ejemplo

- *Idem (29):*

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq0} \left[\lambda_1^p(\lambda_2^q + \lambda_3^q) + \lambda_2^p(\lambda_3^q + \lambda_1^q) \right.$$
$$\left. + \lambda_3^p(\lambda_1^q + \lambda_2^q) - 6 \right] + \sum_{r=1}^{\infty} 6 a_{00r} \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^r - 1 \right]$$

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos e incompresibles

- Para materiales incompresibles, $I_3 = 1$, y W depende sólo de I_1 e I_2.
- En función de $I_i = I_i(\mathbf{V}^2)$ (ídem (28)):

$$W(I_1, I_2) = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{pq}(I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q$$

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos e incompresibles

Ejemplo

- **Material de Mooney-Rivlin**:

$$W(I_1, I_2) = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3)$$

- **Material Neo-Hookeano**:

$$W(I_1) = c_{10}(I_1 - 3)$$

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos e incompresibles

- En función de λ_i (ídem (30)):

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq} \big[\lambda_1^p(\lambda_2^q + \lambda_3^q) + \lambda_2^p(\lambda_3^q + \lambda_1^q) + \lambda_3^p(\lambda_1^q + \lambda_2^q) - 6\big] \tag{31}$$

- Como $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, se puede extender (31) a p, q negativos, por ejemplo:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2a_{p0}(\lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p - 3) \tag{32}$$

Funciones de energía para materiales hiperelásticos isótropos e incompresibles

Ejemplo

- **Material de Ogden**: *en (32), no es necesario restringirse a exponentes enteros:*

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \qquad (33)$$

con $\alpha_p \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$ lo más pequeño posible, pero suficientemente grande como para representar correctamente el comportamiento del material.

Descomposición isocórica-volumétrica del gradiente de deformación

- El gradiente de deformación puede descomponerse como:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left(J^{1/3}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{A}_{\mathrm{vol}}} \underbrace{\left(J^{-1/3}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{A}_{\mathrm{isoc}}} \tag{34}$$

$\mathbf{A}_{\mathrm{vol}}$: componente volumétrica de $\mathbf{A}$ (dilatación pura).

$\mathbf{A}_{\mathrm{isoc}}$: componente isocórica de $\mathbf{A}$, t.q. $\det \mathbf{A}_{\mathrm{isoc}} = 1$.

Funciones de energía regularizadas para materiales hiperelásticos isótropos e incompresibles

- Genéricamente, la función de energía de un material hiperelástico isótropo e incompresible es

$$W = W(I_1, I_2)$$

I_1, I_2: invariantes principales de $\mathbf{V}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

- **Versión regularizada:**

$$W(I_1, I_2) \approx W^*(I_1^*, I_2^*, J) = W(I_1^*, I_2^*) + \kappa f_{\text{reg}}(J)$$

I_1^*, I_2^*: invariantes principales de $\mathbf{V}_{\text{isoc}}^2 = J^{-2/3}\mathbf{A}\mathbf{A}^T$
κ: módulo de compresibilidad, $\kappa \to \infty$ para incompresible.
f_{reg}: función de regularización, $f_{\text{reg}}(J) = 0$ para $J = 1$, por ej.

$$\ln J, \quad \frac{1}{2}(J-1)^2$$

Función de energía regularizada para materiales neo-Hookeanos

- Material Neo-Hookeano:

$$W = C_1(I_1 - 3) \qquad \text{con } I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{AA}^T),\ C_1 \in \mathbb{R}$$

- Material Neo-Hookeano regularizado:

$$W = C_1(I_1^* - 3) + C_2(J-1)^2$$

$$\text{con } I_1^* = J^{-2/3}\,\mathrm{tr}(\mathbf{AA}^T),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Función de respuesta para la tensión nominal en materiales neo-Hookeanos regularizados

- Función de respuesta para el tensor de tensión nominal (Euleriano-Lagrangiano, no simétrico):

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}} = C_1 \frac{\partial I_1^*}{\partial \mathbf{A}} + 2C_2(J-1)\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}}$$

$$\left[\frac{\partial I_1^*}{\partial \mathbf{A}}\right]_{\alpha i} = \frac{\partial I_1^*}{\partial A_{i\alpha}} = \frac{\partial}{\partial A_{i\alpha}}\left(J^{-2/3} A_{k\beta} A_{k\beta}\right)$$

$$= -\frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial A_{i\alpha}} A_{k\beta} A_{k\beta} + 2J^{-2/3} \underbrace{A_{k\beta} \overbrace{\left(\frac{\partial A_{k\beta}}{\partial A_{i\alpha}}\right)}^{=\delta_{ik}\delta_{\alpha\beta}}}_{=A_{i\alpha}}$$

$$= \left[-\frac{2}{3} J^{-5/3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} + 2J^{-2/3} \mathbf{A}^T\right]_{\alpha i}$$

Función de respuesta para la tensión nominal en materiales neo-Hookeanos regularizados

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = J\mathbf{B}^T$$
$$\frac{\partial I_1^*}{\partial \mathbf{A}} = 2J^{-2/3}\left[\mathbf{A}^T - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{B}^T\right]$$

$\Rightarrow$ Función de respuesta para la tensión nominal

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}} = 2C_1 J^{-2/3}\left[\mathbf{A}^T - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{B}^T\right] + 2C_2 J(J-1)\mathbf{B}^T$$
$$\equiv \mathbf{H}(\mathbf{A})$$

Función de respuesta para el 2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff en materiales neo-Hookeanos regularizados

- Sea el 2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff (Lagrangiano, simétrico) :

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{B}^T\mathbf{T}\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{B}$$

conjugado del tensor de deformación de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E}^{(2)} \equiv \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}\right)$$

Función de respuesta para el 2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff en materiales neo-Hookeanos regularizados

- Función de respuesta para la tensión nominal:

$$\mathbf{S} = 2C_1 J^{-2/3}\left[\mathbf{A}^T - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{B}^T\right] + 2C_2 J(J-1)\mathbf{B}^T$$

- Función de respuesta para el 2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{S}\mathbf{B} = 2C_1 J^{-2/3}\left[\mathbf{I} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right] + 2C_2 J(J-1)\mathbf{B}^T\mathbf{B}$$

- Como $\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-2}$, $J = \det \mathbf{U}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{U}^2)$:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{G}^*(\mathbf{U}) = \mathbf{G}^*\left((2\mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{I})^{1/2}\right) \equiv \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{E}^{(2)}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^{(2)}}$$

Función de respuesta para la tensión de Cauchy en materiales neo-Hookeanos regularizados

- Función de respuesta para la tensión nominal:

$$\mathbf{S} = 2C_1 J^{-2/3}\left[\mathbf{A}^T - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{B}^T\right] + 2C_2 J(J-1)\mathbf{B}^T$$

- Función de respuesta para el tensor de tensión de Cauchy (Euleriano, simétrico):

$$\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = 2C_1 J^{-5/3}\underbrace{\left[\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{I}\right]}_{\equiv \mathrm{dev}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \equiv \mathrm{dev}(\mathbf{V}^2)} + 2C_2(J-1)\mathbf{I}$$

$$\equiv \mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{V}) \tag{35}$$

Caso de pequeñas deformaciones

- Sea el tensor gradiente de desplazamiento

$$\mathbf{D} = \operatorname{Grad}\mathbf{u} = \operatorname{Grad}(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \mathbf{A} - \mathbf{I}$$

- Definimos el **tensor de pequeñas deformaciones o de deformaciones infinitesimales:**

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T\right)$$

- Luego:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = (\mathbf{D} + \mathbf{I})(\mathbf{D} + \mathbf{I})^T = \mathbf{D}\mathbf{D}^T + \mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{I} = 2\varepsilon + \mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T$$

- **Asumiendo pequeñas deformaciones:**

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T \approx 2\varepsilon + \mathbf{I}$$
$$J \approx 1 + \operatorname{tr}\varepsilon$$

Ley de Hooke para materiales elásticos isótropos en pequeñas deformaciones

- La función de respuesta (35) para la tensión de Cauchy en materiales neo-Hookeanos (grandes deformaciones, no lineal)

$$\mathbf{T} = 2C_1 J^{-5/3}\,\mathrm{dev}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) + 2C_2(J-1)\mathbf{I}$$

para pequeñas deformaciones tiende a la **ley de Hooke**:

$$\mathbf{T} = 2\mu\,\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon} + \kappa\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{I}$$

$\mu = 2C_1$: módulo de corte

$\kappa = 2C_2$: módulo de compresiblidad

Formas alternativas de la ley de Hooke

- Ley de Hooke:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \underbrace{2\mu \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\operatorname{dev} \mathbf{T}} + \underbrace{\kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I}}_{\frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T}\, \mathbf{I}} = 2\mu \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} \right) + \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} \\
&= 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \underbrace{\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right)}_{\equiv \lambda} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} \\
&= \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{T} \text{ es función lineal de } \boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

λ, μ: constantes de Lamé.

$\mathbb{C}$: tensor (isótropo de cuarto orden) de módulos elásticos, de componentes

$$
C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{36}
$$

Ley de Kirchhoff-Saint Venant para materiales elásticos isótropos en grandes deformaciones

- Función de energía para materiales de Kirchhoff-Saint Venant:

$$W = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(I_1^E)^2 - 2\mu I_2^E$$

con $I_1^E = \text{tr}(\mathbf{E})$, $I_2^E = [\text{tr}^2(\mathbf{E}) - \text{tr}(\mathbf{E}^2)]/2$: invariantes principales del tensor de deformación de Green-Lagrange $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}^{(2)}$.

- Función de respuesta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^{(2)}} &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\left(2I_1^E \frac{\partial I_1^E}{\partial \mathbf{E}^{(2)}}\right) - 2\mu \frac{\partial I_2^E}{\partial \mathbf{E}^{(2)}} \\
&= (\lambda + 2\mu)\,\text{tr}(\mathbf{E}^{(2)})\mathbf{I} - 2\mu\left(\text{tr}(\mathbf{E}^{(2)})\mathbf{I} - \mathbf{E}^{(2)}\right) \\
&= 2\mu\mathbf{E}^{(2)} + \lambda\,\text{tr}(\mathbf{E}^{(2)})\mathbf{I} \equiv \mathbb{C}\mathbf{E}^{(2)} \\
&\implies \quad \mathbf{T}^{(2)} \text{ es función lineal de } \mathbf{E}^{(2)}
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$: tensor de módulos elásticos (ídem (36)).