

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 7

MEF para problemas parabólicos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
CIMEC (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Santa Fe, 3/11/2014

Problemas parabólicos

- El problema parabólico típico es el de conducción de calor que define el campo de temperaturas u en un cuerpo isótropo que ocupa la región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con conductividad k y calor específico ρc , sujeto a una fuente de calor interna f :

$$\left. \begin{array}{lll}
 \rho c \dot{u} - \nabla \cdot (k \nabla u) = f & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in I = (0, T) & \text{Balance de energía} \\
 u = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \forall t \in I & \text{CB Dirichlet} \\
 k \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q, \forall t \in I & \text{CB Neumann} \\
 u(\mathbf{x}, t) = u^0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 & \text{Condición inicial}
 \end{array} \right\} \text{PVBI (6.1)}$$

- Discretización espacial por MEF \Rightarrow forma semi-discreta del PVBI (6.1)
- Discretización temporal \Rightarrow forma totalmente discreta del PVBI (6.1)

- Nota:** por discretización espacial se obtiene un PVI para un sistema de ODEs. Este sistema puede ser rígido, imponiendo requisitos adicionales de estabilidad sobre los métodos que se usarán para la discretización temporal.

Problema parabólico modelo en 1D

Conducción de calor en una barra con $k=\rho c=1$, $Q=0$.

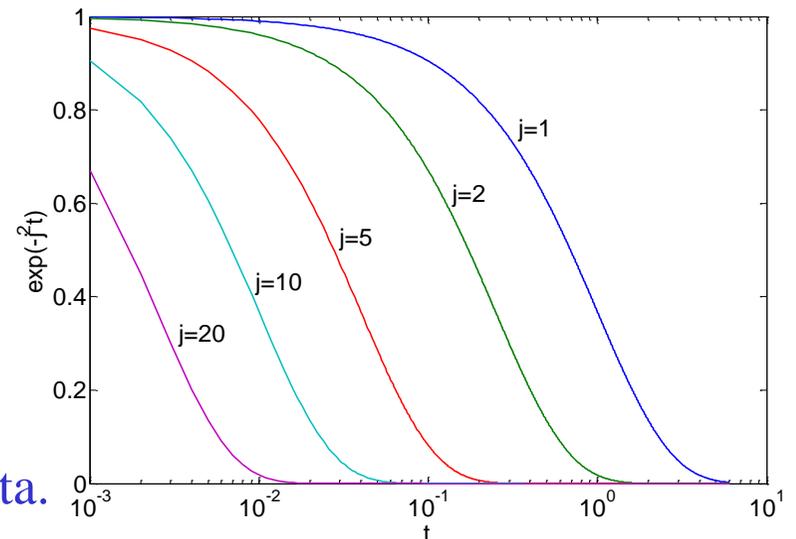
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

- Por sep. de vbles. se obtiene la solución exacta: $u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 \exp(-j^2 t) \sin(jx)$ donde $u_j^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} u^0(x) \sin(jx) dx$ son los coefs. de la serie de Fourier de $u^0(x)$.

$\Rightarrow u$ es una combinación lineal de ondas sinusoidales $\sin(jx)$, de frecuencia j y amplitud $u_j^0 \exp(-j^2 t)$.

- Cada onda $\sin(jx)$ vive en una escala de tiempo de orden $O(j^{-2})$, puesto que $\exp(-j^2 t)$ es muy pequeño cuando $j^2 t$ es moderadamente grande.
- Las componentes de alta frecuencia se amortiguan rápidamente.

$\Rightarrow u$ se hace cada vez más suave cuando t aumenta.



Problema parabólico modelo en 1D (cont.)

- En gral., u no será suave para t pequeño, y puede que $\|u_t\| \doteq \|u_t\|_{L_2(0,\pi)} \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow 0$.
- Más precisamente, el tamaño de las derivadas de u con respecto a t y a x para t pequeño dependerá de cuan rápido decaiga u_j^0 con j creciente.

- Ejemplos:

$$u^0(x) = \pi - x, 0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} u_j^0 = Cj^{-1} \\ \|u_t\| \approx Ct^{-\frac{3}{4}} \text{ cuando } t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$u^0(x) = \min(x, \pi - x), 0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} u_j^0 = Cj^{-2} \\ \|u_t\| \approx Ct^{-\frac{1}{4}} \text{ cuando } t \rightarrow 0 \end{cases}$$

- Si u_j^0 decae más rápidamente que $j^{-2.5}$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces $\|u_t\|$ será acotada cuando $t \rightarrow 0$. Cuando más suave sea u^0 , más rápido decaerá u_j^0 cuando $j \rightarrow \infty$. Nótese que u^0 debe satisfacer las CB Dirichlet: $u^0(0) = u^0(\pi) = 0$.
- La fase inicial (t pequeño), donde ciertas derivadas de u son grandes, se denomina transitorio inicial. Superado el transitorio inicial, la solución de un problema parabólico se hará cada vez más suave a medida que t aumenta.
- Puede haber transitorios para $t > 0$ si Q o las CB varían bruscamente en el tiempo.

Estabilidad en problemas parabólicos

- Si $f=0$, se verifica (desarrollar a partir de la solución por serie Fourier)

$$\|u\| \leq \|u^0\|$$

$$\|\dot{u}\| \leq \frac{C}{t} \|u^0\| \quad t \in I$$

- De la última estimación se deduce:

$$\text{si } u^0 \in L_2(\Omega) \Rightarrow \|\dot{u}\| = O(t^{-1}) \text{ cuando } t \rightarrow 0$$

Semi-discretización espacial

- Dado el problema
$$\begin{aligned} \dot{u} - \Delta u &= f & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in I=(0,T) \\ u &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \forall t \in I \\ u &= u^0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

su forma variacional resulta

$$\begin{aligned} \text{Hallar } u(t) \in V = H_0^1(\Omega), t \in I / (\dot{u}(t), v) + a(u(t), v) &= (f, v), \quad \forall v \in V, t \in I. \\ (u(0), v) &= (u^0, v) \end{aligned}$$

- Sea $V_h \subset V$ de dimensión finita, con base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$.
- Supongamos Ω poligonal convexo y V_h compuesto de funciones lineales por tramos sobre una triangulación casi uniforme T_h de Ω . Reemplazando V por V_h obtenemos el análogo semi-discreto de (6.7)

$$\begin{aligned} \text{Hallar } u_h(t) \in V_h, t \in I / (\dot{u}_h(t), v) + a(u_h(t), v) &= (f, v), \quad \forall v \in V_h, t \in I. \\ (u_h(0), v) &= (u^0, v) \end{aligned}$$

Semi-discretización espacial (cont.)

- Como $u_h \in V_h$ podemos escribir $u_h(x, t) = \sum_{i=1}^M \xi_i(t) \varphi_i(x)$
- Además, tomando $v = \varphi_j$, $j = 1, 2, \dots, M$, en la forma semi-discreta obtenemos

$$\sum_{i=1}^M \dot{\xi}_i(t) (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^M \xi_i(t) a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, M, t \in I.$$

$$\sum_{i=1}^M \xi_i(0) (\varphi_i, \varphi_j) = (u^0, \varphi_j)$$

- Matricialmente: $\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{F}(t), \quad t \in I.$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{U}^0$$

- Las matrices de masa \mathbf{B} y rigidez \mathbf{A} son simétricas y definidas positivas.
- Números de condición de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\max \text{ autovalor de } \mathbf{A}}{\min \text{ autovalor de } \mathbf{A}} = O(h^{-2}), \quad \kappa(\mathbf{B}) = O(1)$$

$$\left| \begin{aligned} B_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dv \\ A_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dv \\ F_i &= (f, \varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i dv \\ U_i^0 &= (u^0, \varphi_i) = \int_{\Omega} u^0 \varphi_i dv \end{aligned} \right.$$

Semi-discretización espacial (cont.)

- Dado el problema semi-discreto: $B\dot{\xi}(t) + A\xi(t) = F(t), \quad t \in I. \quad (6.10)$
 $B\xi(0) = U^0$

- Si introducimos la descomposición de Cholesky $B = E^T E$, y la nueva vble. $\eta = E\xi$, y multiplicamos (6.10) por E^{-T} , obtenemos:

$$E^T E \dot{\xi}(t) + A\xi(t) = F(t) \quad t \in I$$

$$E^T \dot{\eta}(t) + A E^{-1} \eta(t) = F(t) \quad E^T E \xi(0) = U^0$$

$$\dot{\eta}(t) + E^{-T} A E^{-1} \eta(t) = E^{-T} F(t) \quad E^T \eta(0) = U^0$$

$$\dot{\eta}(t) + A^* \eta(t) = g(t) \quad t \in I \quad \eta(0) = E^{-T} U^0 \doteq \eta^0 \quad (6.11)$$

cuya solución es

$$\eta(t) = \exp(-A^* t) \eta^0 + \int_0^t \exp(-A^* (t-s)) g(s) ds, \quad t \in I$$

- La matriz $A^* = E^{-T} A E^{-1}$ es simétrica y definida positiva, con $\kappa(A^*) = O(h^{-2})$.
- El problema (6.11) es un ejemplo de PVI rígido, dado que $\kappa(A^*)$ es grande y en consecuencia los autovalores de A^* (que son positivos) varían considerablemente.

Estabilidad en el problema semi-discreto

- Dado $(\dot{u}_h(t), v) + a(u_h(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h, t \in I$
- Si $f=0$ y $v=u_h$, $(\dot{u}_h(t), u_h(t)) + a(u_h(t), u_h(t)) = 0 \quad t \in I$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h(t)\|^2 + a(u_h(t), u_h(t)) = 0$$

$$\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} \|u_h(s)\|^2 + 2a(u_h(s), u_h(s)) \right] ds = 0$$

$$\|u_h(t)\|^2 + 2 \int_0^t a(u_h(s), u_h(s)) ds = \|u_h(0)\|^2 \leq \|u^0\|^2$$

$$\Rightarrow \|u_h(t)\| \leq \|u_h(0)\| \leq \|u^0\|$$

Estimación de error en el problema semi-discreto

- **Teorema:** si u es la solución del problema modelo

$$(\dot{u}(t), v) + a(u(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in V, t \in I.$$

$$(u(0), v) = (u^0, v)$$

y u_h es la solución del análogo semi-discreto

$$(\dot{u}_h(t), v) + a(u_h(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h, t \in I.$$

$$(u_h(0), v) = (u^0, v)$$

luego, \exists cte. $C/$

$$\max_{t \in I} \|u(t) - u_h(t)\| \leq C \left(1 + \left| \log \frac{T}{h^2} \right| \right) \max_{t \in I} h^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}$$

- **Demo.:** Sea φ_h la solución del problema “dual”

$$(\dot{\varphi}_h(s), v) + a(\varphi_h(s), v) = 0, \quad \forall v \in V_h, s \in (0, t)$$

$$\varphi_h(t) = e_h(t)$$

donde $e_h(s) = u_h(s) - \hat{u}_h(s)$ y \hat{u}_h satisface

$$a(u(s) - \hat{u}_h(s), v) = 0, \quad \forall v \in V_h, s \in (0, T)$$

Estimación de error en el problema semi-discreto (cont.)

- Demo.:** Sea ψ_h la solución del problema “dual”

$$-(\dot{\psi}_h(s), v) + a(\psi_h(s), v) = 0, \quad \forall v \in V_h, s \in (0, t) \quad (6.15)$$

$$\psi_h(t) = e_h(t)$$

donde $e_h(s) = u_h(s) - \hat{u}_h(s)$ y \hat{u}_h (“proyección estática” de u) satisface

$$a(u(s) - \hat{u}_h(s), v) = 0, \quad \forall v \in V_h, s \in (0, T)$$

Tomamos $v=e_h$ en 6.15 e integramos entre 0 y t :

$$\|e_h(t)\|^2 = \underbrace{\int_0^t \left[-(\dot{\psi}_h(s), e_h(s)) + a(\psi_h(s), e_h(s)) \right] ds}_{=0} + \underbrace{(\psi_h(t), e_h(t))}_{=\|e_h(t)\|^2}$$

Integración p/partes \rightarrow $= \int_0^t \left[(\dot{e}_h(s), \psi_h(s)) + a(e_h(s), \psi_h(s)) \right] ds + (\psi_h(0), e_h(0))$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = u - \hat{u}_h \\ u - u_h \perp v \in V_h \end{array} \right\} \rightarrow = \int_0^t \left[(\dot{\theta}(s), \psi_h(s)) + a(\theta(s), \psi_h(s)) \right] ds + (\theta(s), \psi_h(0))$$

Integración p/partes \rightarrow $= -\int_0^t (\theta(s), \dot{\psi}_h(s)) ds + (\theta(t), \psi_h(t)) \quad (6.17)$

Estimación de error en el problema semi-discreto (cont.)

El problema dual
$$\begin{cases} (\dot{\psi}_h(s), v) + a(\psi_h(s), v) = 0, & \forall v \in \mathbf{V}_h, s \in (0, t) \\ \psi_h(t) = e_h(t) \end{cases}$$

es equivalente a la ODE
$$\begin{cases} -\mathbf{B}\dot{\psi}(s) + \mathbf{A}\psi(s) = \mathbf{0}, & s \in (0, t) \\ \psi(t) = \psi^0 \end{cases} \quad (6.15b)$$

Lema: \exists ctes. c, C , que dependen sólo de los parámetros $\beta \leq \rho/h$, t.q.

$$\left. \begin{aligned} ch^2 |\eta|^2 \leq \|v\|^2 \leq Ch^2 |\eta|^2 \\ a(v, v) \equiv \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq Ch^{-2} \|v\|^2 \end{aligned} \right| \quad \forall v = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i \in \mathbf{V}_h$$

- Usando este Lema, la solución explícita de 6.15b y 6.17, llegamos a

$$\|\psi_h(s)\| \leq \|e_h(s)\|$$

$$\int_0^t \|\dot{\psi}_h(s)\| dx \leq C \left(1 + \left| \log \frac{t}{h^2} \right| \right) \|e_h(s)\|$$

$$\|e_h(t)\| \leq C \left(1 + \left| \log \frac{t}{h^2} \right| \right) \max_{s \in (0, t)} \|\theta(s)\|$$

- Nota:** C es independiente de T .

Discretización en tiempo y espacio

Consideremos el problema
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{A}^* \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0} & t \in \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0 \end{cases} \quad (6.11)$$

cuya solución resulta
$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{j=1}^M (\boldsymbol{\eta}^0, \boldsymbol{\chi}^j) \exp(-\mu_j t) \boldsymbol{\chi}^j \quad (6.20)$$

con: $\boldsymbol{\chi}^j$: autovectores normalizados de \mathbf{A}^*

μ_j : autovalores de \mathbf{A}^* , $\mu_1 = O(1) < \mu_2 < \dots < \mu_M = O(h^{-2})$.

- Los autovalores grandes corresponden a autovectores que oscilan rápidamente, mientras que los autovalores pequeños corresponden a autovectores “lentos”.
- En 6.20, se observa que:
 1. $\boldsymbol{\eta}(t)$ tiene componentes que viven en escalas de tiempo en un amplio rango, de $O(h^{-2})$ a $O(1)$, lo que determina la rigidez del problema 6.11.
 2. las componentes de alta frecuencia de $\boldsymbol{\eta}(t)$ se amortiguan rápidamente.
 3. $\boldsymbol{\eta}(t)$ posee en general un transitorio inicial.

$$\exp(-A^* t) \varphi_0$$

$$\underline{A}^* \underline{x}_i = \underline{x}_i \mu_i \rightarrow (\mu_i, \underline{x}_i)$$

$$\underline{A}^* \underline{X} = \underline{X} \underline{\mu} \Rightarrow \underline{x}_i^T \underline{x}_j = \delta_{ij}$$

$$\underline{X}^T \underline{A}^* \underline{X} = \underline{\mu} \quad \left[\begin{array}{ccc} \underline{x}_1 \mu_1 & \underline{x}_2 \mu_2 & \underline{x}_3 \mu_3 \dots \end{array} \right]$$

$$\underline{A} \begin{bmatrix} \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \mu_2 & \underline{x}_3 \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$\exp(-At) = I - At + \frac{A^2 t^2}{2} - \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$A = X \Lambda X^T$$

$$A^2 = X \Lambda X^T X \Lambda X^T = X \Lambda^2 X^T$$

$$A^3 = X \Lambda^3 X^T$$

$$\exp(-\Lambda t) = \begin{bmatrix} \exp(-\mu_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(-\mu_n t) \end{bmatrix}$$

$$\exp(-At) = X \left(1 - \mu_1 t + \frac{\mu_1^2 t^2}{2} - \dots \right) X^T$$

$$\exp(-At) = X \begin{bmatrix} \exp(-\mu_1 t) & & \\ & \exp(-\mu_2 t) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} X^T$$

Métodos de discretización en el tiempo

- Los problemas rígidos plantean requisitos especiales sobre los métodos de discretización temporal.
- Por razones de estabilidad, si se quiere evitar el uso de pasos de tiempo excesivamente pequeños, deben usarse métodos implícitos, lo que implica resolver un sistema de ecuaciones por paso de tiempo.
- Conviene usar métodos que adapten el paso de tiempo automáticamente según la suavidad de la solución.
- Se estudiarán primero dos métodos clásicos (Euler hacia atrás y Crank-Nicolson), y luego el método de Galerkin discontinuo.
- Sea $0=t_0 < t_1 < \dots < t_N=T$ una subdivisión de $I=(0,T)$ en subintervalos $I_n=(t_{n-1}, t_n)$ de longitud (paso de tiempo) Δt_n .

Método de Euler hacia atrás (backward-Euler, bE)

Usando este método, el problema semi-discreto

$$\text{Hallar } u_h \in V_h / \quad (\dot{u}_h(t), v) + a(u_h(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h, t \in I.$$
$$(u_h(0), v) = (u^0, v)$$

se aproxima por

$$\text{Hallar } u_h^n \in V_h / \quad \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n}, v \right) + a(u_h^n, v) = (f(t_n), v), \quad \forall v \in V_h, n = 1, 2, \dots, N$$
$$(u_h^0, v) = (u^0, v) \tag{6.21}$$

- La ec. 6.21a se obtiene introduciendo en 6.8a la aproximación en diferencias finitas hacia atrás

$$\dot{u}_h = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n} + \varepsilon(O(\Delta t_n)) \approx \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n}$$

- Conocido u_h^{n-1} , la solución $u_h^n = \sum_{i=1}^M \xi_i^n \varphi_i$ al instante t_n queda determinada por

$$(B + \Delta t_n A) \xi^n = B \xi^{n-1} + \Delta t_n F(t_n)$$

Estabilidad del método de Euler hacia atrás

Suponiendo $f=0$, resulta

$$\begin{aligned} & \|u_h^n\|^2 - (u_h^n, u_h^{n-1}) + \Delta t_n a(u_h^n, u_h^n) = 0 \\ (u_h^n, u_h^{n-1}) & \leq \frac{1}{2} \|u_h^n\|^2 + \frac{1}{2} \|u_h^{n-1}\|^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \|u_h^n\|^2 - \frac{1}{2} \|u_h^{n-1}\|^2 + \Delta t_n a(u_h^n, u_h^n) \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Luego:

$$\|u_h^n\|^2 + \underbrace{2\Delta t_n a(u_h^n, u_h^n)}_{>0} \leq \|u_h^{n-1}\|^2$$

con lo cual:

$$\|u_h^n\| \leq \|u_h^{n-1}\| \leq \dots \leq \|u_h^1\| \leq \|u_h^0\| \leq \|u^0\|$$

Estabilidad del método de Euler hacia atrás (cont.)

- Dado el problema totalmente discreto obtenido usando bE:

$$\text{Hallar } \boldsymbol{\eta}^n \in \mathbb{R}^M / \frac{\boldsymbol{\eta}^n - \boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t_n} + \mathbf{A}^* \boldsymbol{\eta}^n = \mathbf{g}(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

- Si $\mathbf{g}=0$, el problema a resolver resulta:

$$(\mathbf{I} + \Delta t_n \mathbf{A}^*) \boldsymbol{\eta}^n = \boldsymbol{\eta}^{n-1}$$

- Ahora, introducimos la norma de la matriz \mathbf{M} :

$$|\mathbf{M}| = \max_{\substack{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^M \\ \boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}}} \frac{|\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{\eta}|}.$$

- Luego:

$$\left| (\mathbf{I} + \Delta t_n \mathbf{A}^*)^{-1} \right| = \max_{j=1, \dots, M} \frac{1}{1 + \Delta t_n \mu_j} < 1$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\eta}^n| \leq |\boldsymbol{\eta}^{n-1}| \leq \dots \leq |\boldsymbol{\eta}^1|, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Método de Crank-Nicolson (CN)

Usando este método, el problema semi-discreto

$$\text{Hallar } u_h \in V_h / \quad (\dot{u}_h(t), v) + a(u_h(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h, t \in I.$$

$$(u_h(0), v) = (u^0, v)$$

se aproxima por

$$\text{Hallar } u_h^n \in V_h / \quad \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n}, v \right) + a \left(\frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}, v \right) = \left(\frac{f(t_n) + f(t_{n-1})}{2}, v \right), \quad \forall v \in V_h, n = 1, 2, \dots, N$$

$$(u_h^0, v) = (u^0, v) \tag{6.24}$$

- La ec. 6.24a se obtiene introduciendo las aproximaciones

$$\dot{u}_h^{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n} + O(\Delta t_n^2) \approx \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n} \quad u_h^{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2} + O(\Delta t_n^2) \approx \frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}$$

- Conocido u_h^{n-1} , la solución $u_h^n = \sum_{i=1}^M \xi_i^n \varphi_i$ al instante t_n queda determinada por

$$\left(\mathbf{B} + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A} \right) \boldsymbol{\xi}^n = \left(\mathbf{B} - \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A} \right) \boldsymbol{\xi}^{n-1} + \frac{\Delta t_n}{2} [\mathbf{F}(t_n) + \mathbf{F}(t_{n-1})]$$

- **Nota:** tomando $v = (u_h^n + u_h^{n-1})/2$ en 6.24a con $f=0$, se obtiene de nuevo la desigualdad de estabilidad 6.23: $\|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| \leq \|u^0\|$.

Estabilidad del método de Crank-Nicolson

- Dado el problema totalmente discreto obtenido usando CN:

$$\text{Hallar } \boldsymbol{\eta}^n \in \mathbb{R}^M / \frac{\boldsymbol{\eta}^n - \boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^* (\boldsymbol{\eta}^n + \boldsymbol{\eta}^{n-1}) = \frac{1}{2} [\mathbf{g}(t_n) + \mathbf{g}(t_{n-1})], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

- Si $\mathbf{g}=0$, el problema a resolver resulta:

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A}^* \right) \boldsymbol{\eta}^n = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A}^* \right) \boldsymbol{\eta}^{n-1}$$

- Luego:

$$\left| \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A}^* \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A}^* \right) \right| = \max_{j=1, \dots, M} \frac{\left| 1 - \frac{\Delta t_n}{2} \mu_j \right|}{1 + \frac{\Delta t_n}{2} \mu_j} < 1$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\eta}^n| \leq |\boldsymbol{\eta}^{n-1}| \leq \dots \leq |\boldsymbol{\eta}^1|, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Método de Euler hacia delante (forward-Euler, fE)

- Dado el problema totalmente discreto obtenido usando fE:

$$\text{Hallar } \boldsymbol{\eta}^n \in \mathbb{R}^M / \frac{\boldsymbol{\eta}^n - \boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t_n} + \mathbf{A}^* \boldsymbol{\eta}^{n-1} = \mathbf{g}(t_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

- Si $\mathbf{g}=0$, el problema a resolver resulta: $\boldsymbol{\eta}^n = (\mathbf{I} - \Delta t_n \mathbf{A}^*) \boldsymbol{\eta}^{n-1}$
- Luego, tendremos

$$\left| (\mathbf{I} - \Delta t_n \mathbf{A}^*) \right| = \max_{j=1, \dots, M} |1 - \Delta t_n \mu_j| = |1 - \Delta t_n \mu_M| \leq 1$$

sólo si $\Delta t_n \leq 2/\mu_m = O(h^2)$, o sea que el método fE garantiza estabilidad (i.e., $|\boldsymbol{\eta}^n| \leq |\boldsymbol{\eta}^{n-1}|$) sí y sólo si

$$\Delta t_n \leq Ch^2$$

- Se dice que fE es condicionalmente estable, contrariamente a bE y CN, que son incondicionalmente estables, i.e., estables independientemente del tamaño del paso de tiempo.
- bE y CN se dicen implícitos por cuanto se debe resolver un sistema de ecs./paso de tiempo. En cambio, fE se dice explícito puesto que la solución se obtiene sin necesidad de resolver ningún sistema.