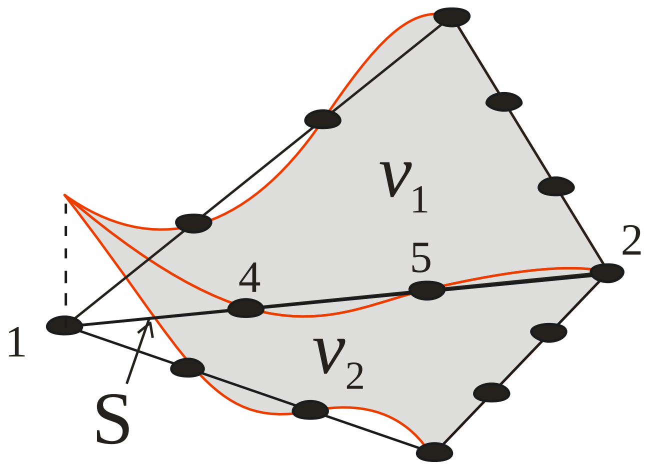


Introducción al Método de los Elementos Finitos

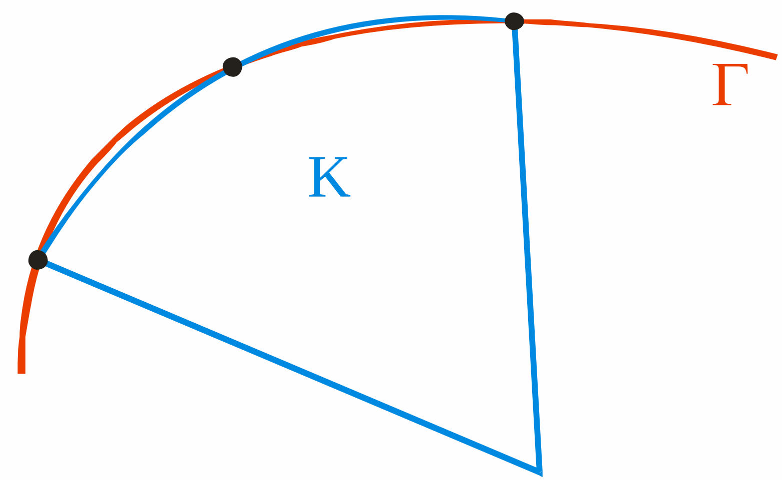
Parte 6

Elementos curvos e integración numérica. Elementos infinitos.

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Elementos curvos

- Hasta aquí se han usado aproximaciones lineales por trozos de la frontera Γ.
- En 2D, se aproximó Γ con una línea poligonal, con un error de orden $O(h^2)$.
- Aproximaremos Γ con curvas descritas por polinomios de grado $k \geq 2$, con error $O(h^{k+1})$.
- En una malla de Ω, los elementos adyacentes a Γ tendrán un lado curvo.



Elementos curvos

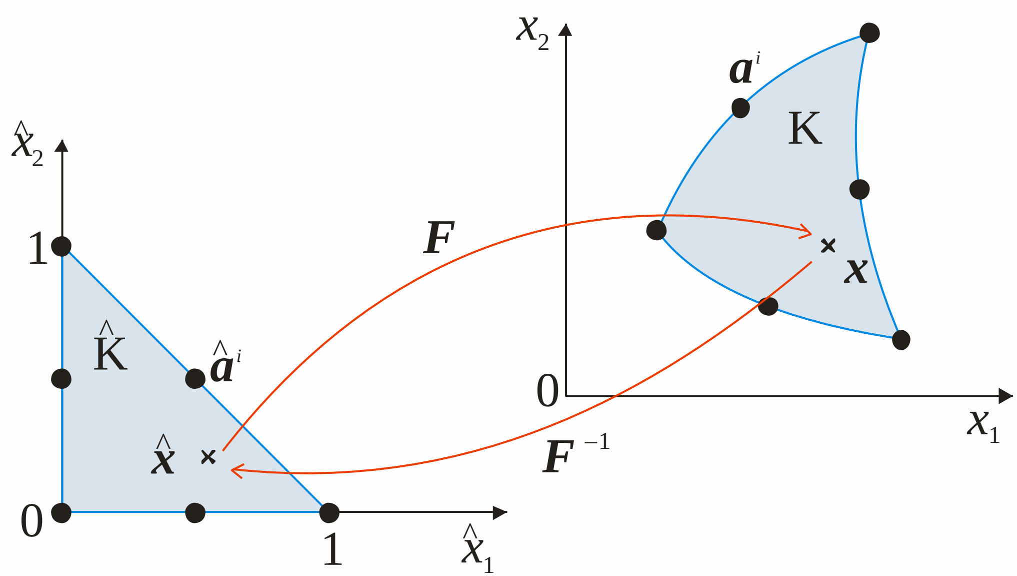
Un elemento "curvo" se obtiene de la siguiente manera:

1. Supongamos el elemento $(\hat{\mathrm{K}}, \mathrm{P}_{\hat{\mathrm{K}}}, \hat{\Sigma})$.
   - $\hat{\Sigma}$ es un conj. de gdl de tipo Lagrangiano (i.e., valores de la función en ciertos puntos $\hat{\boldsymbol{a}}^i \in \hat{\mathrm{K}},\ i = 1, 2, \ldots, m$)
2. Sea $\boldsymbol{F} : \hat{\mathrm{K}} \to \mathrm{K}$ un mapeo 1-a-1, con inversa $\boldsymbol{F}^{-1} : \mathrm{K} \to \hat{\mathrm{K}}$.
3. Definimos

$$\mathrm{P}_{\mathrm{K}} = \left\{ p : p(\boldsymbol{x}) = \hat{p}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x})),\ \boldsymbol{x} \in \mathrm{K},\ \hat{p} \in \mathrm{P}_{\hat{\mathrm{K}}} \right\}$$

$$\Sigma_{\mathrm{K}} = \left\{ \text{valores de la función en } \boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{a}}^i)),\ i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

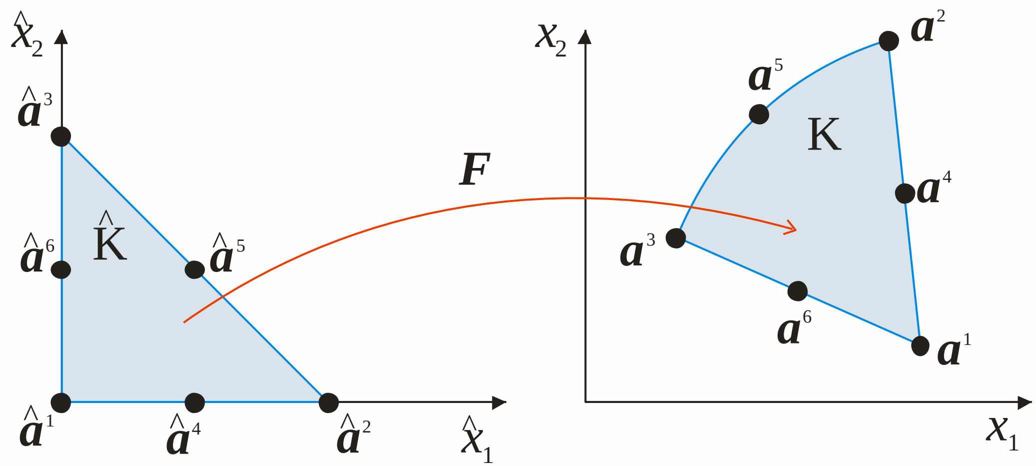
4. Ahora, $(\mathrm{K}, \mathrm{P}_{\mathrm{K}}, \Sigma)$ constituye un <u>elemento finito "curvo"</u>.



Elementos curvos isoparamétricos

- Si en el mapeo $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ las funciones son del mismo tipo que en P_K, el elemento se dice isoparamétrico.

- **Ejemplo:** sea $\hat{K}$ el elemento de ref., con nodos $\hat{\boldsymbol{a}}^1$, $\hat{\boldsymbol{a}}^2$, $\hat{\boldsymbol{a}}^3$ (en los vértices), $\hat{\boldsymbol{a}}^4$, $\hat{\boldsymbol{a}}^5$, $\hat{\boldsymbol{a}}^6$ (en el centro de los lados).
  - $\Sigma_{\hat{K}} = \{\text{valores en los nodos}\}$
  - $P_{\hat{K}} = P_2(\hat{K})$.
  - $\hat{\varphi}_i, i = 1, 2, \ldots, 6,$ func. de base en $P_2(\hat{K})$.



Elementos curvos isoparamétricos

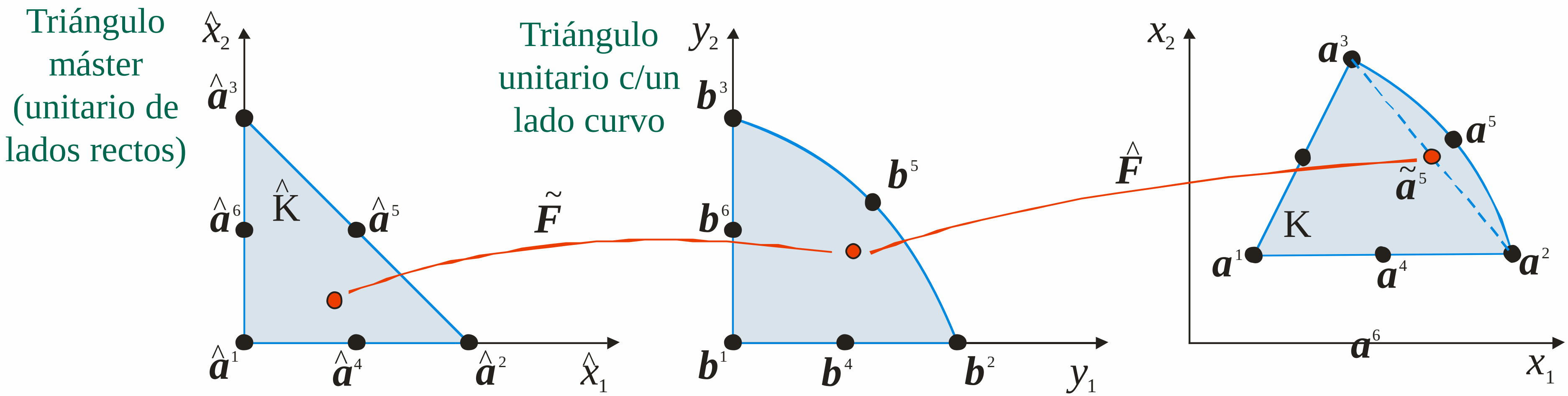
- Definimos el mapeo $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{a}^{j} \hat{\varphi}_{\mathrm{j}}(\hat{\boldsymbol{x}}), \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}}$
- Luego, escribimos $\mathrm{K} = \boldsymbol{F}(\hat{\mathrm{K}}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in {}^{2} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}),\ \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}} \right\}$
- Se define el Jacobiano de ***F*** como $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$
- ***F*** es localmente 1-a-1 en una pequeña vecindad de c/punto $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}}$ si $\det \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{x}}) \neq 0.$
- Necesitamos que ***F*** sea globalmente 1-a-1, i.e., que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K},\ \exists ! \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}} \,/\, \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}$$

- ***F*** será globalmente 1-a-1 si $\det \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{x}}) \neq 0,\ \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}}.$

Elementos curvos isoparamétricos

- Descompongamos $\boldsymbol{F}$ como $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{F}}(\hat{\boldsymbol{x}}))$



- $\hat{\boldsymbol{F}}$, que mapea $\boldsymbol{b}^j \equiv \hat{\boldsymbol{a}}^j$ en $\boldsymbol{a}^j$, $j = 1, 2, 3,$ tiene la forma:

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} a_1^2 - a_1^1 & a_1^3 - a_1^1 \\ a_2^2 - a_2^1 & a_2^3 - a_2^1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}.$$

Si los nodos $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^3$ no son coincidentes $\Rightarrow$ det $\boldsymbol{B} \neq 0 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{F}}$ es 1-a-1.

- Analicemos ahora el mapeo $\tilde{\boldsymbol{F}} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, que está definido por

$$\tilde{F}_i = \hat{x}_i + d_i \hat{x}_1 \hat{x}_2, \quad d_i = 4b_i^5 - 2, \quad i = 1, 2.$$

$$F(\hat{x}) = \hat{F}(\tilde{F}(\hat{x})) = \hat{F}\left(\begin{pmatrix} \hat{x}_1 + d_1 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 + d_2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$F(\hat{a}_5) = \hat{F}\left(\begin{pmatrix} 1/2 + d_1/4 \\ 1/2 + d_2/4 \end{pmatrix}\right) = \hat{F}\left(\begin{pmatrix} 1/2 + \frac{4b_1^5 - 2}{4} \\ 1/2 + \frac{4b_2^5 - 2}{4} \end{pmatrix}\right) =$$

$$F(\hat{a}_5) = \hat{F}\left(\begin{pmatrix} b_1^5 \\ b_2^5 \end{pmatrix}\right) = a_5$$

Elementos curvos isoparamétricos

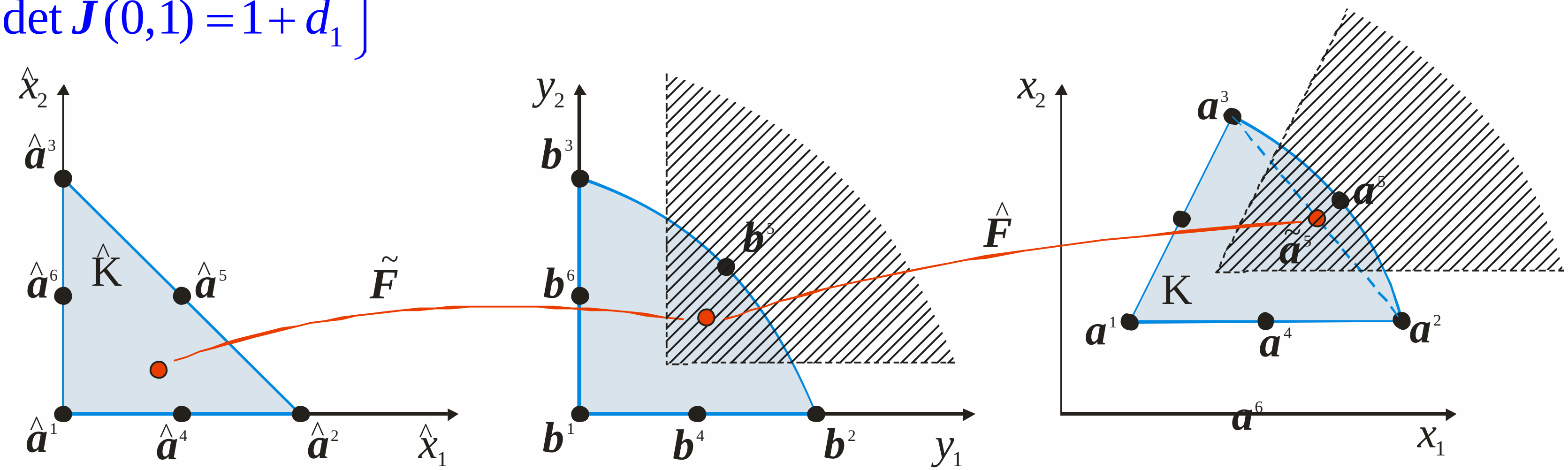
- Analicemos ahora el mapeo $\tilde{\boldsymbol{F}} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, que está definido por

$$\tilde{F}_i = \hat{x}_i + d_i \hat{x}_1 \hat{x}_2, \quad d_i = 4b_i^5 - 2, \quad i = 1,2$$

con Jacobiano $$\hat{\boldsymbol{J}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 1 + d_1 \hat{x}_2 & d_1 \hat{x}_1 \\ d_2 \hat{x}_2 & 1 + d_2 \hat{x}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \hat{\boldsymbol{J}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = 1 + d_1 \hat{x}_2 + d_2 \hat{x}_1$$

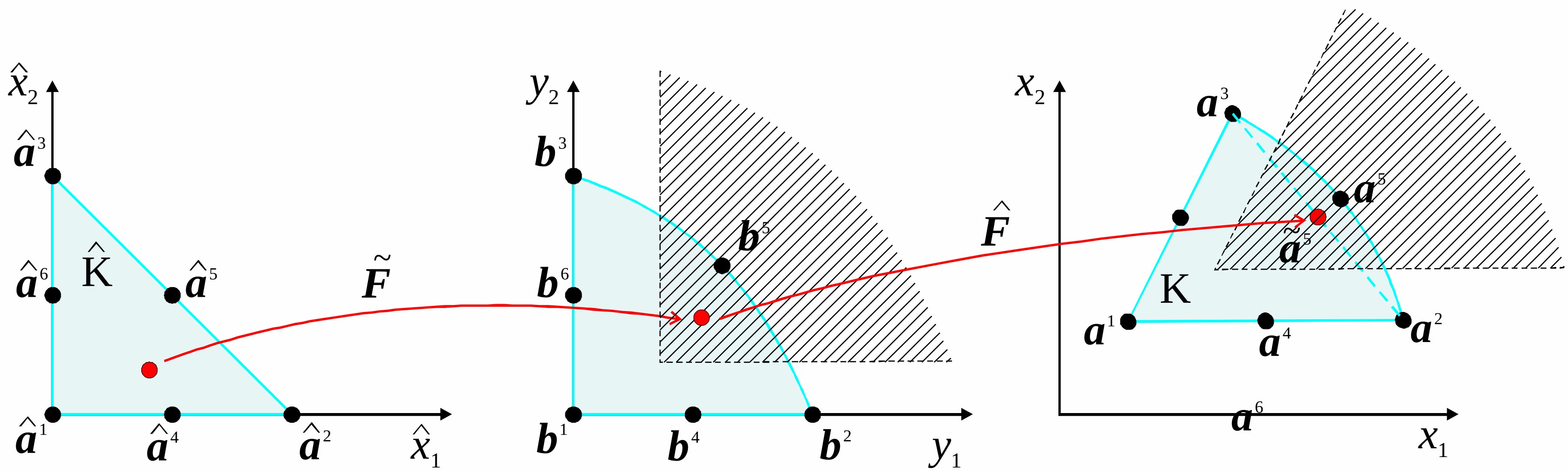
$\det \hat{\boldsymbol{J}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ lineal en $\hat{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \det \hat{\boldsymbol{J}}(\hat{\boldsymbol{x}}) > 0$ en $\hat{\mathrm{K}} \Leftrightarrow \det \hat{\boldsymbol{J}}(\hat{\boldsymbol{x}}) > 0$ en los vértices $\hat{\boldsymbol{a}}^j$, $j = 1,2,3.$

$$\left.\begin{aligned} \det \hat{\boldsymbol{J}}(0,0) &= 1 \\ \det \hat{\boldsymbol{J}}(1,0) &= 1 + d_2 \\ \det \hat{\boldsymbol{J}}(0,1) &= 1 + d_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \det \hat{\boldsymbol{J}} > 0 \text{ en } \hat{\mathrm{K}} \text{ si } d_i > -1 \Rightarrow b_i > \frac{1}{4},\ i = 1,2.$$



Elementos curvos isoparamétricos

- Luego, $\tilde{\boldsymbol{F}}$ es 1-a-1 si $\boldsymbol{b}^5$ y $\boldsymbol{a}^5$ caen en las áreas sombreadas, para lo que $\tilde{\boldsymbol{a}}^5$ debe estar suficientemente próximo a $\boldsymbol{a}^5$.
- El mapeo original $\boldsymbol{F}$ es 1-a-1 bajo las mismas condiciones.
- En un elemento K con un lado curvo, la dist. $|\boldsymbol{a}^5 - \tilde{\boldsymbol{a}}^5|$ es de $O(h_K^2)$.
- Luego, estando $\tilde{\boldsymbol{a}}^5$ "cerca" de $\boldsymbol{a}^5$ (mallas "poco distorsionadas"), el mapeo $\boldsymbol{F}$ será 1-a-1.



Elementos isoparamétricos

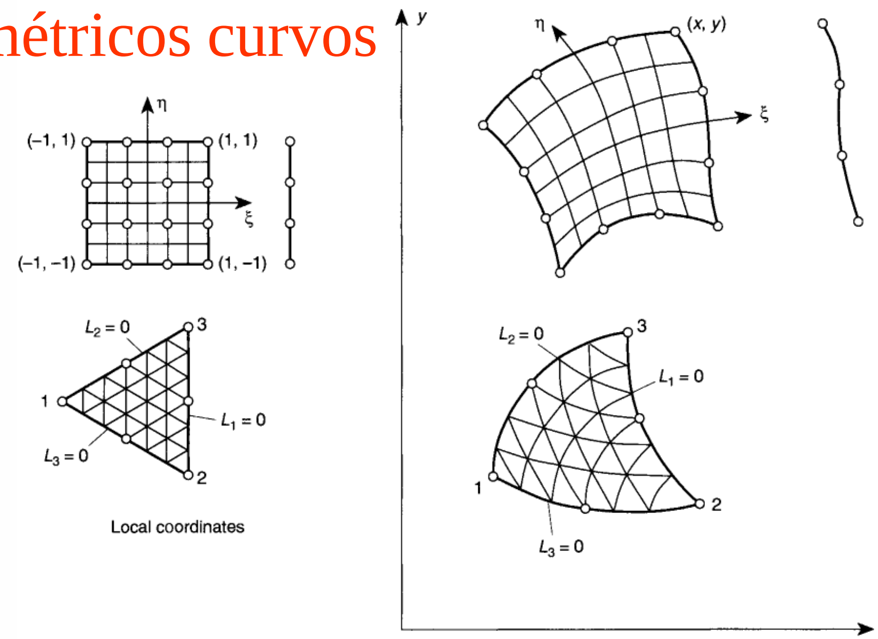
- **Error de interpolación:** Dada una función v sobre K, definimos el interpolante $\pi v \in \mathrm{P}_\mathrm{K}$ requiriendo que $\pi v(\boldsymbol{a}^i)=v(\boldsymbol{a}^i)$, i=1,...,6. Si K es un triángulo común (como el visto anteriormente), entonces
$$\|v-\pi v\|_{\mathrm{H}^s(\mathrm{K})} \le C h_\mathrm{K}^{r-s} \|v\|_{\mathrm{H}^r(\mathrm{K})}, \quad 0 \le s \le r \le 3$$
- Esto también vale para triángulo curvo K, siempre que no sea demasiado curvo. Y esto se verifica en aplicaciones típicas, donde los elementos aproximan una frontera suave.

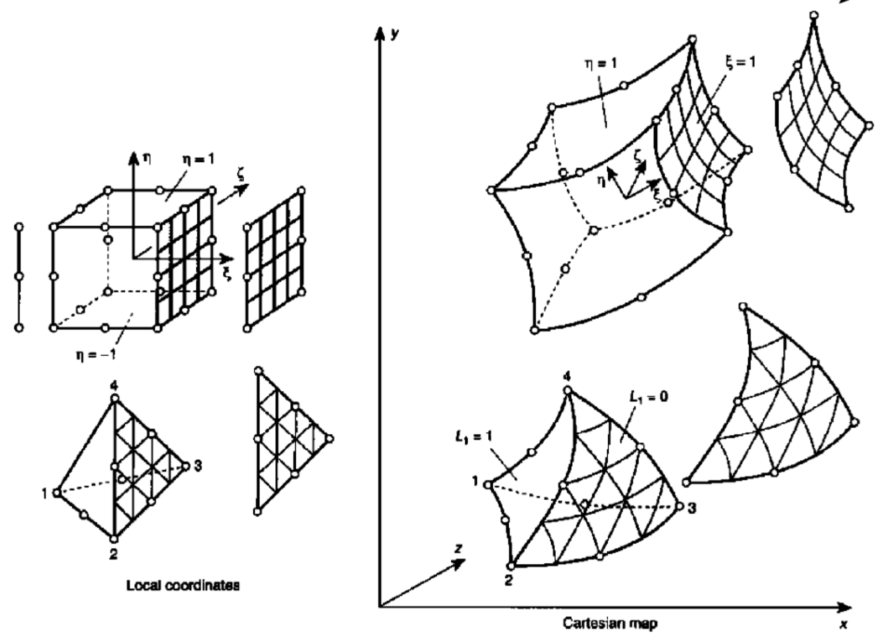
- **Espacio V_h:** Sea T_h={K} una malla de Ω, con elementos $(\mathrm{K},\mathrm{P}_\mathrm{K},\Sigma_\mathrm{K})$, que pueden tener uno o más lados curvos. Sea Ω_h la unión de los elementos de T_h, que es una aproximación a Ω con frontera cuadrática a trozos. Se define
$$V_h = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega_h) : v|_\mathrm{K} \in \mathrm{P}_\mathrm{K}, \mathrm{K} \in \mathrm{T}_h \right\}$$
- Usando este espacio para el problema de Poisson, tenemos
$$\|u-u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_h)} \le C h^2 \|u\|_{\mathrm{H}^3(\Omega)}, \qquad \|u-u_h\|_{\mathrm{L}_2(\Omega_h)} \le C h^3 \|u\|_{\mathrm{H}^3(\Omega)}$$

Elementos isoparamétricos curvos

- Elementos de las formas básicas en 1D, 2D y 3D pueden mapearse a formas distorsionadas. De esta manera, las coord. locales $\xi\eta\zeta$ o $L_1\,L_2\,L_3 L_4$ se transforman en curvilíneas cuando se plotean en el sistema Cartesiano global *xyz*.
- Ello es posible si existe una correspondencia 1-a-1 entre las coord. Cartesianas y las curvilíneas, i.e. si se pueden establecer los mapeos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(\xi,\eta,\zeta) \\ f_y(\xi,\eta,\zeta) \\ f_z(\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} f_x(L_1,L_2,L_3,L_4) \\ f_y(L_1,L_2,L_3,L_4) \\ f_z(L_1,L_2,L_3,L_4) \end{bmatrix}$$

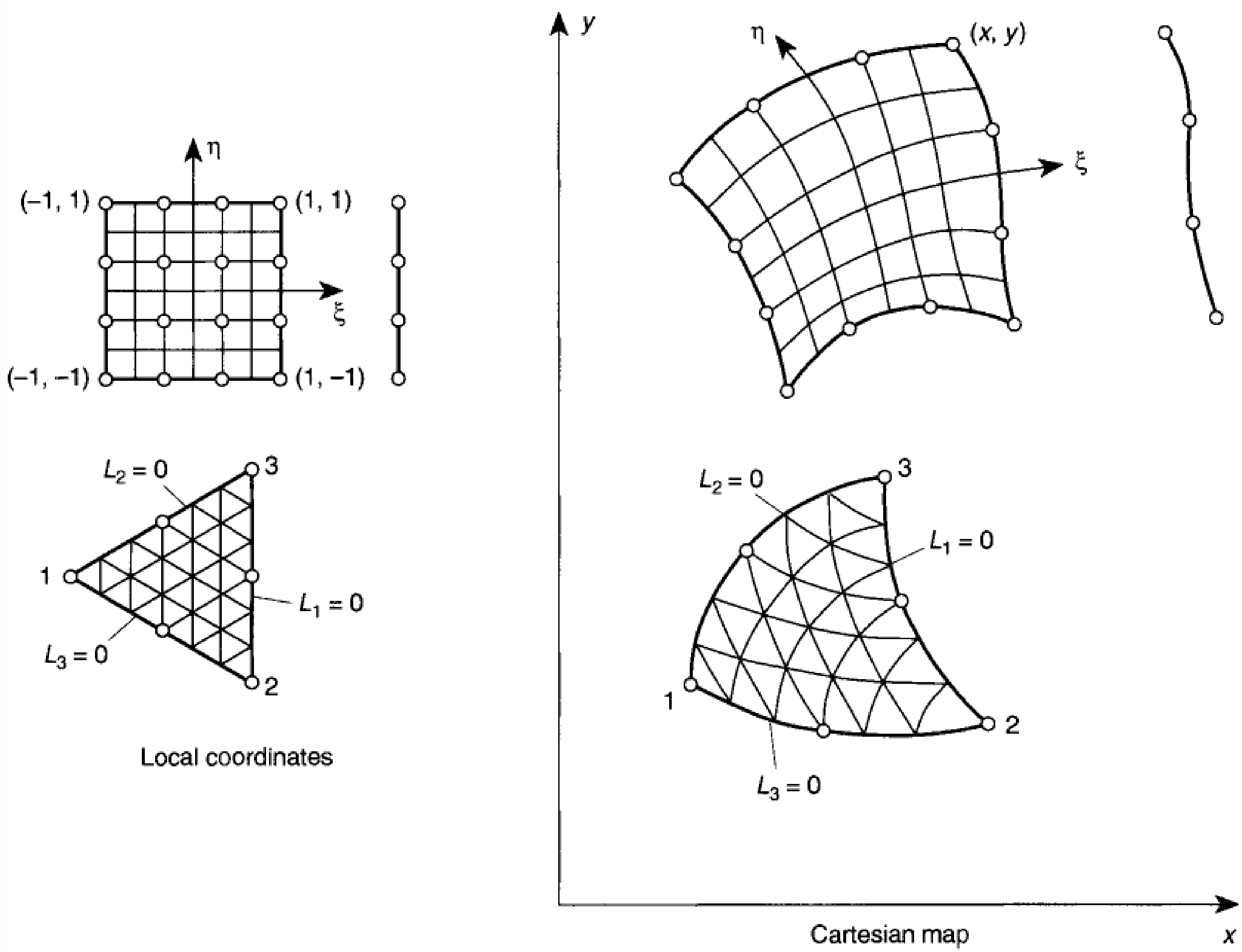




* Figuras extraídas de [ZT2000]

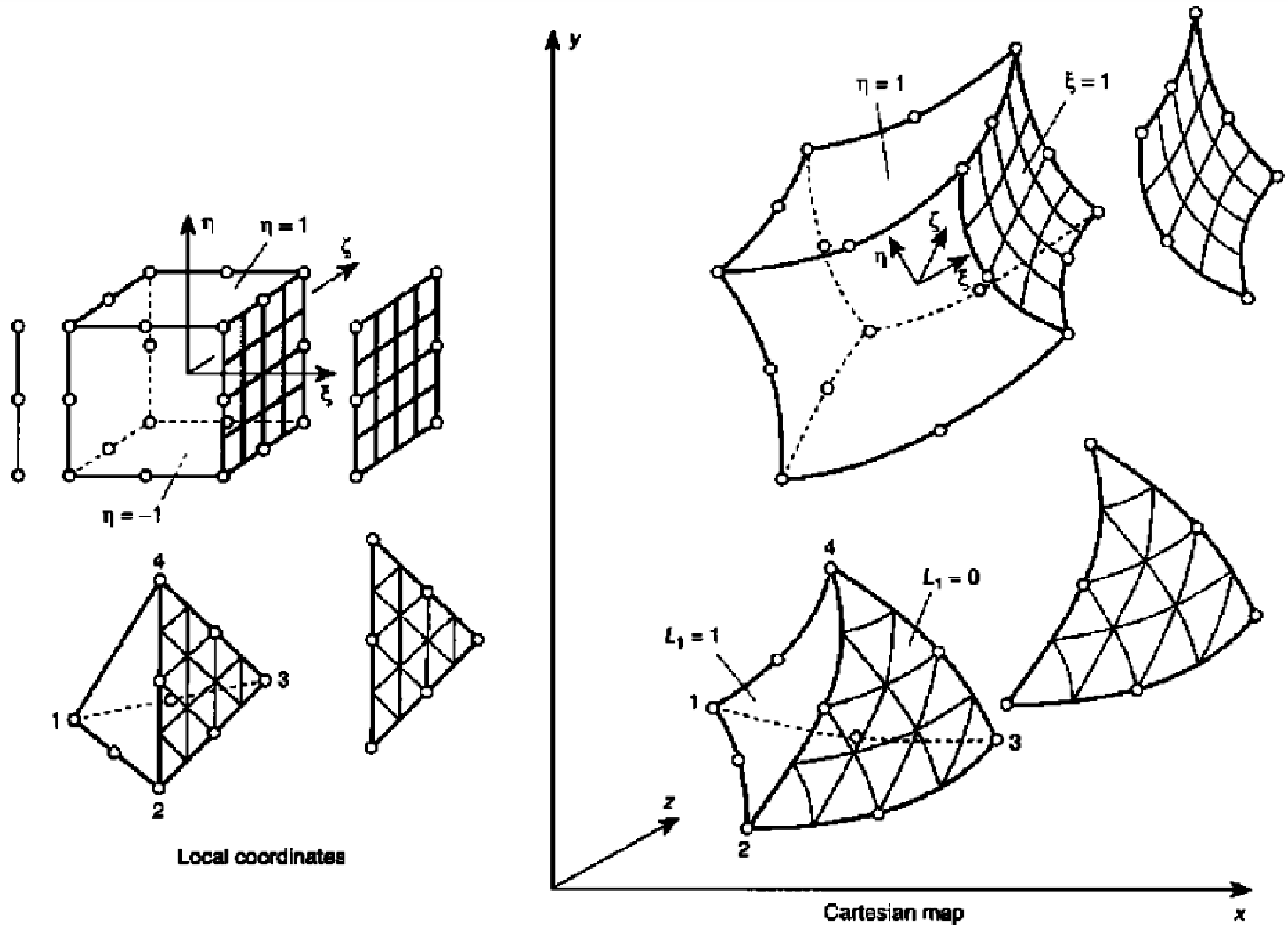
* [ZT2000] OC Zienkiewicz, RL Taylor, “The Finite Element Method”, Vol.1, 5ª ed., Butterworth-Heinemann, 2000.

Elementos curvos: mapeo de elementos 2D



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Elementos curvos: mapeo de elementos 3D



* Figuras extraídas de [ZT2000]

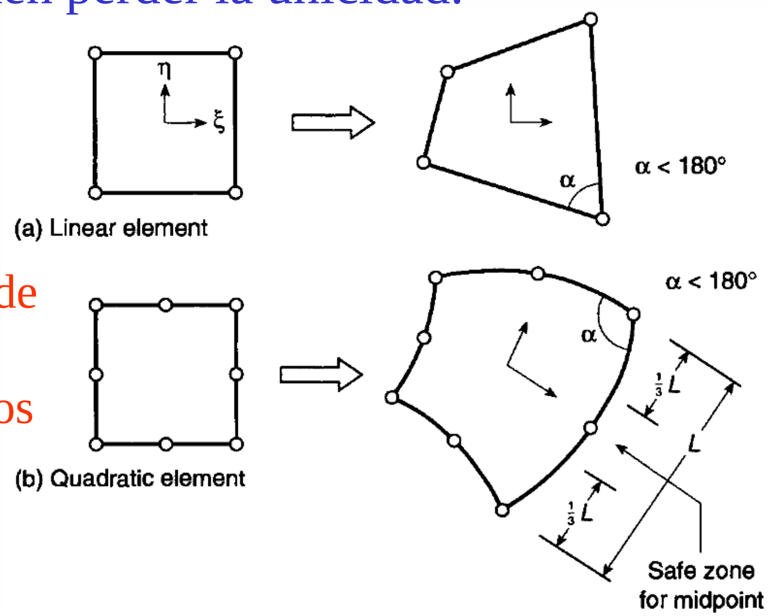
Coordenadas curvilíneas paramétricas

- La forma más simple de definir mapeos es usando funciones de forma N_i dadas en términos de las coords. locales sobre el elemento máster:

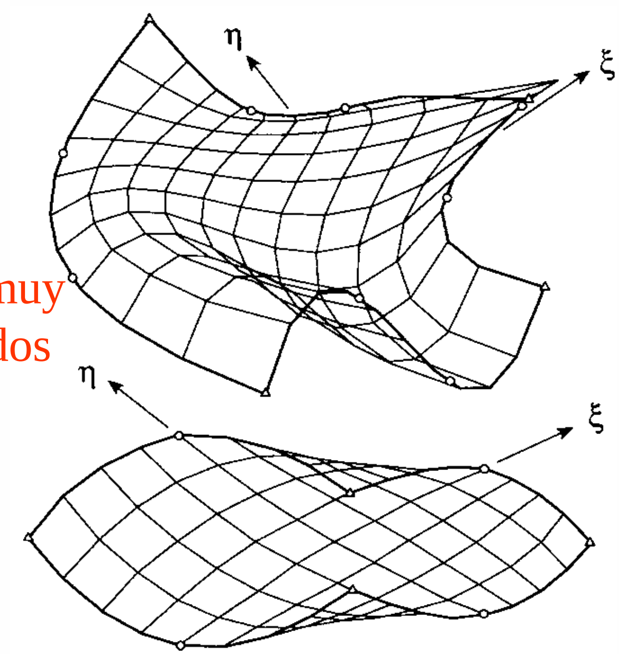
$$x = N_1(\xi,\eta,\zeta)\,x_1 + N_2(\xi,\eta,\zeta)\,x_2 + \ldots$$
$$y = N_1(\xi,\eta,\zeta)\,y_1 + N_2(\xi,\eta,\zeta)\,y_2 + \ldots$$
$$z = N_1(\xi,\eta,\zeta)\,z_1 + N_2(\xi,\eta,\zeta)\,z_2 + \ldots$$

- A cada punto (ξ,η,ζ) en coords. locales debe corresponderle un solo punto (x,y,z) en coords. globales. Como ya vimos, elementos muy distorsionados pueden perder la unicidad.

Requisitos de unicidad en cuadrángulos

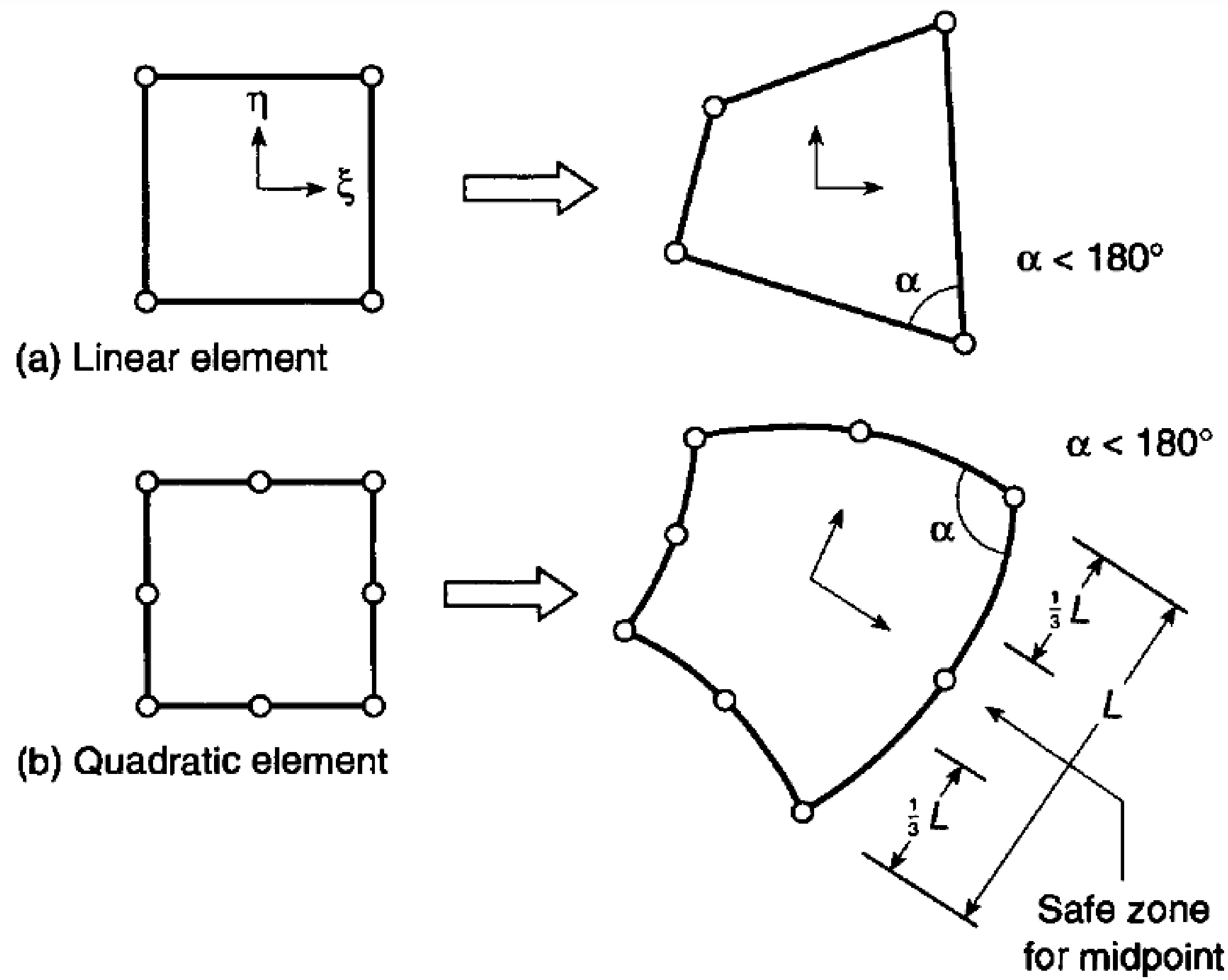


Pérdida de unicidad en elementos muy distorsionados



Figuras extraidats de [ZT2000]

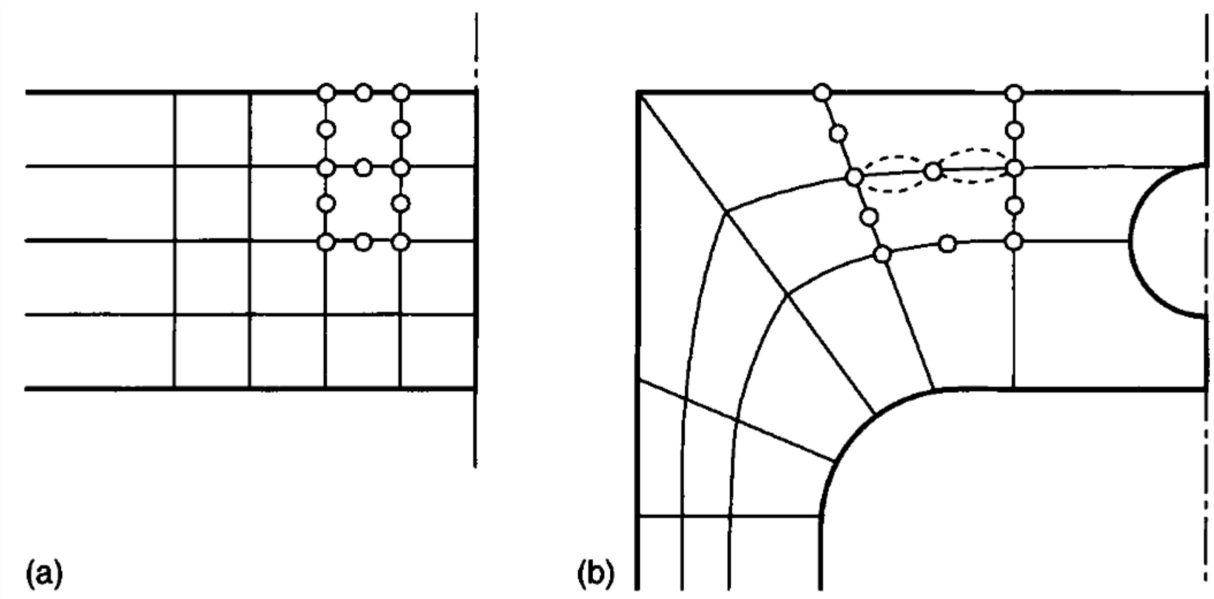
Mapeos admisibles en cuadrángulos



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Conformidad geométrica y continuidad

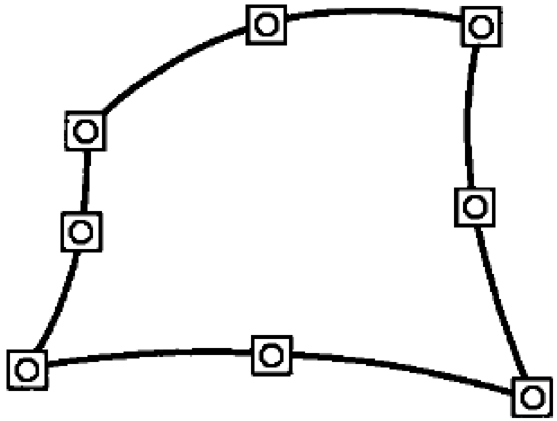
- **Teorema 1:** Si dos elementos adyacentes son generados a partir de elementos máster (o de referencia) donde las funciones de forma son C0-continuas, entonces los elementos serán contiguos (compatibles).



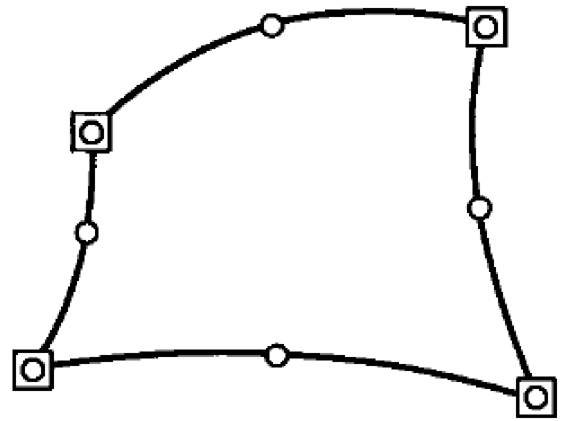
- **Teorema 2:** Si las funciones de forma garantizan la continuidad C0 de la solución en las coordenadas del elemento máster, luego también se satisfará continuidad C0 en las coordenadas del elemento distorsionado.

* Figuras extraídas de [ZT2000]

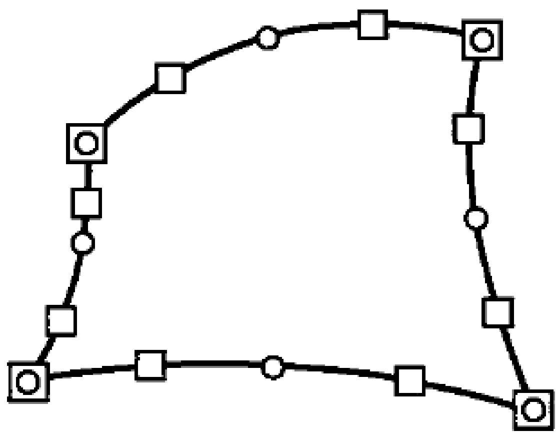
Elementos isoparamétricos, superparamétricos y subparamétricos



(a) Isoparamétrico



(b) Superparamétrico



Subparamétrico

(c)

□ Punto en el que se especifica gdl

○ Punto en el que se especifica coordenada

* Figuras extraídas de [ZT2000]

Cálculo de la matriz de rigidez

- Las funciones de base locales en K están dadas por

$$\varphi_j(\boldsymbol{x}) = \varphi_j(\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}})) = \hat{\varphi}_j\left(\hat{\boldsymbol{x}}\right) = \hat{\varphi}_j\left(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x})\right), \qquad j = 1,\dots,6.$$

- Para el problema de Poisson, deben calcularse las integrales

$$a_{ij}^{\mathrm{K}} = \int_{\mathrm{K}} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx, \qquad i, j = 1,\dots,6.$$

- Por la regla de la cadena, siendo $\hat{\varphi}_j\left(\hat{\boldsymbol{x}}\right) = \varphi_j(\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}})), \qquad j = 1,\dots,6.$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial\hat{x}_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial\hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial\hat{x}_1} + \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial\hat{x}_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial\hat{x}_2} + \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial\hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial\hat{x}_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\hat{x}_1} \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial\hat{x}_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\hat{x}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\nabla\varphi_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-T} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial\hat{x}_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial\hat{x}_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-T}\nabla\hat{\varphi}_i$$

Cálculo de la matriz de rigidez

$$\boldsymbol{J}^{-T} = \left(\boldsymbol{J}^{T}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\left(\left(\boldsymbol{J}^{T}\right)^{T}\right)}{\det \boldsymbol{J}^{T}} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \operatorname{adj}\left(\boldsymbol{J}\right) = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} & -\dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ -\dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{J}_0}{\det \boldsymbol{J}}$$

Luego, la matriz de rigidez resulta, haciendo cambio de variables al elemento master:

$$a_{ij}^{\mathrm{K}} = \int_{\mathrm{K}} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx = \int_{\hat{\mathrm{K}}} \left(\boldsymbol{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i\right) \cdot \left(\boldsymbol{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j\right) \left|\det \boldsymbol{J}\right| d\hat{x} = \int_{\hat{\mathrm{K}}} \left(\boldsymbol{J}_0 \nabla \hat{\varphi}_i\right) \cdot \left(\boldsymbol{J}_0 \nabla \hat{\varphi}_j\right) \frac{d\hat{x}}{\left|\det \boldsymbol{J}\right|}$$

$$\int_k \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\varepsilon}\, dx$$

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{B}}\, \underline{U} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$u = \underline{\underline{N}}_v^T \underline{U}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{J}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$N_v = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Integración numérica (o cuadratura)

- El cálculo analítico de matrices que involucran integrales sobre elementos curvos, particularmente en elementos de alto orden o en caso de heterogeneidad del material, puede volverse prácticamente imposible.
- Para evaluar integrales en MEF, se usan frecuentemente fórmulas de cuadratura:

$$\int_K f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} f(x^j) w_j \qquad \begin{cases} x^j : \text{ puntos de integración o de muestreo} \\ w_j : \text{ peso correspondiente al punto } x^j \end{cases}$$

- Si esta fórmula es exacta para el polinomio de grado r >0, luego el error de integración resulta

$$\left| \int_K f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} f(x^j) w_j \right| \leq C h^{r+1} \sum_{|\alpha|=r+1} \int_K \left| D^\alpha f \right| dx$$

- Puede mostrarse que para el elemento isoparamétrico cuadrático visto, calculando la matriz de rigidez por una regla de integración numérica que integre en forma exacta polinomios de grado r =2, luego

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^2)$$

Integración numérica

En 1D, podemos aproximar tales integrales de la siguiente manera:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)w_j \qquad \begin{cases} \xi_j : \text{ puntos de integración o de muestreo} \\ w_j : \text{ peso correspondiente al punto } x^j \end{cases}$$

Dados los puntos de muestreo ξ_j, j=1,2,…, n, determinamos el polinomio

$$F_n(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \ldots + \alpha_n\xi^{n-1} \qquad \text{t.q.} \quad F_n(\xi_j)=f(\xi_j):$$

$$\begin{cases} F_n(\xi_1) = \alpha_1 + \alpha_2\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_1^{n-1} = f(\xi_1) \\ \qquad\vdots \\ F_n(\xi_n) = \alpha_1 + \alpha_2\xi_n + \ldots + \alpha_n\xi_n^{n-1} = f(\xi_n) \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

Luego:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \int_{-1}^{1} F_n(\xi)d\xi = 2\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_3 + \ldots + \frac{1-(-1)^n}{n}\alpha_n$$

Integración numérica: método de Newton-Cotes

Eligiendo puntos de muestreo equiespaciados entre los extremos, se obtiene el **método de Newton-Cotes.**

Ejemplo: para n=2, ξ_1=–1, ξ_2 =1:

$$F_2(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2)}{2} + \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{2} \xi$$

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^{1} F_2(\xi) d\xi = 2\alpha_1 = f(\xi_1) + f(\xi_2)$$

Nota:

- si la cantidad de puntos de evaluación n es par, se integra exactamente un polinomio de grado *n-1;*
- si la cantidad de puntos de evaluación n es impar, se integra exactamente un polinomio de grado n (ver ejemplo a continuación).

Integración numérica: método de Newton-Cotes

Ejemplo: para n=3, ξ_1=–1, ξ_2 =0, ξ_3 =1:

Sea $f(\xi) = \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\xi^2 + \beta_4\xi^3$

Esta función la aproximamos con $\mathrm{F}(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 \quad (n = 3)$

$$\begin{cases} F(-1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = f(-1) = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \\ F(0) = \alpha_1 \qquad\qquad\qquad\quad = f(0) = \beta_1 \\ F(1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = f(\xi) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 + \beta_4 \\ \alpha_3 = \beta_3 \end{cases}$$

Luego con n=3 integramos en forma exacta un polinomio de grado 3:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi = 2\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_3$$

Integración numérica: método de Gauss-Legendre

En lugar de definir a priori la posición de los n puntos de muestreo, se la determinará de manera de obtener el mayor orden de precisión para n dado.

Se busca calcular en forma exacta la integral del polinomio F_p, ($p \geq n$ a determinar), cuya integral es

$$I = \int_{-1}^{1} F_p(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\alpha_1 + \alpha_2\xi_j + \ldots + \alpha_p \xi_j^{p-1}\right) = 2\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_3 + \ldots + \frac{1-(-1)^p}{p}\alpha_p$$

lo que da lugar al sistema de ecs.

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 + \ldots + w_n &= 2 \\ w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + \ldots + w_n\xi_n &= 0 \\ &\vdots \\ w_1\xi_1^{p-1} + w_2\xi_2^{p-1} + \ldots + w_n\xi_n^{p-1} &= \frac{1-(-1)^p}{p} \end{aligned}\right\}$$

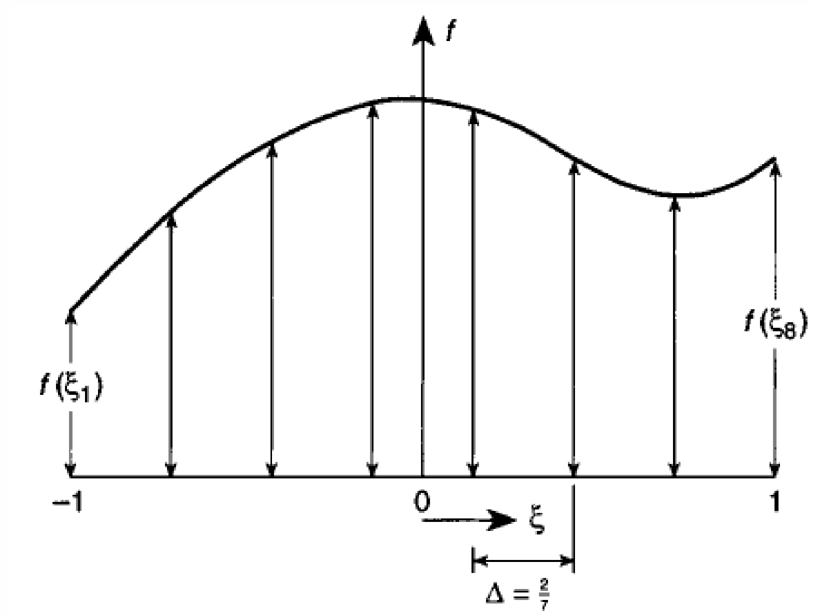
p ecuaciones

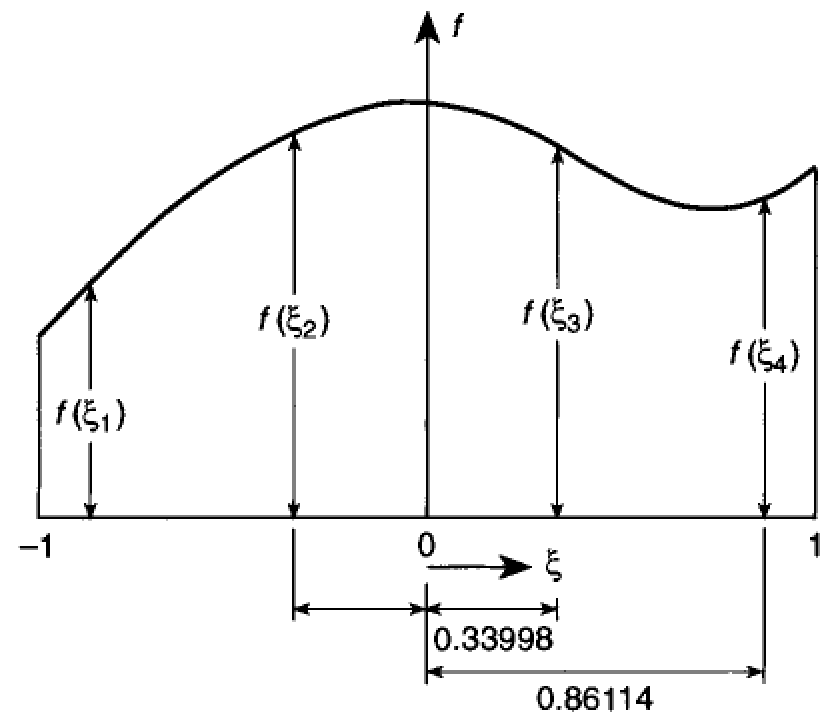
$2n$ incógnitas $(w_1, \ldots, w_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$

que tendrá solución si $p = 2n$.

Integración numérica: Newton-Cotes vs Gauss Legendre

- Integración exacta de un polinomio de grado 7





Newton-Cotes

n=8 → 8 puntos de muestreo

→ pol grado 7 integrado exactamente

Gauss-Legendre

n = 4 → 4 puntos de muestreo

→ pol grado 7 integrado exactamente

* Figuras extraídas de [ZT2000]

Integración numérica de Gauss-Legendre

Table 9.1 Abscissae and weight coefficients of the gaussian quadrature formula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} H_i f(a_j)$

$\pm a$		H	Pol integrado exactamente
	$n = 1$		
0		2.000 000 000 000 000	Pol grado 1
	$n = 2$		
$1/\sqrt{3}$		1.000 000 000 000 000	Pol grado 3
	$n = 3$		
$\sqrt{0.6}$		5/9	Pol grado 5
0.000 000 000 000 000		8/9	
	$n = 4$		
0.861 136 311 594 953		0.347 854 845 137 454	Pol grado 7
0.339 981 043 584 856		0.652 145 154 862 546	
	$n = 5$		
0.906 179 845 938 664		0.236 926 885 056 189	
0.538 469 310 105 683		0.478 628 670 499 366	Pol grado 9
0.000 000 000 000 000		0.568 888 888 888 889	
	$n = 6$		
0.932 469 514 203 152		0.171 324 492 379 170	
0.661 209 386 466 265		0.360 761 573 048 139	Pol grado 11
0.238 619 186 083 197		0.467 913 934 572 691	
	$n = 7$		
0.949 107 912 342 759		0.129 484 966 168 870	
0.741 531 185 599 394		0.279 705 391 489 277	
0.405 845 151 377 397		0.381 830 050 505 119	Pol grado 13
0.000 000 000 000 000		0.417 959 183 673 469	

* Tabla extraída de [ZT2000]

Integración numérica en cuadrados (2D) y cubos (3D)

- Se aplican las reglas de integración numérica 1D en cada dirección.

$$I_{2D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)w_i w_j$$

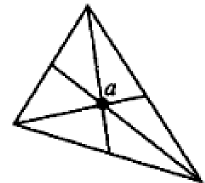
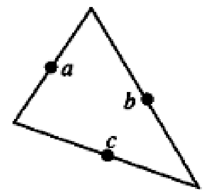
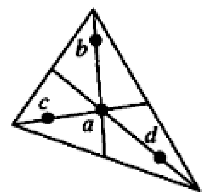
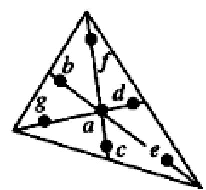
$$I_{3D} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)w_i w_j w_k$$

Integración numérica en triángulos

$$I=\int_0^1\int_0^{1-L_1} f(L_1,L_2)\,dL_1 dL_2$$

$$\approx\sum_{j=0}^{n} f(L_1^j,L_2^j)H_j$$

Table 9.2 Numerical integration formulae for triangles

Order	Figure	Error	Points	Triangular coordinates	Weights
Linear		$R=O(h^2)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R=O(h^3)$	a	$\frac{1}{2},\frac{1}{2},0$	$\frac{1}{3}$
			b	$0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			c	$\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Cubic		$R=O(h^4)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
			b	$0.6, 0.2, 0.2$	$\frac{25}{48}$
			c	$0.2, 0.6, 0.2$	
			d	$0.2, 0.2, 0.6$	
Quintic		$R=O(h^6)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	0.225 000 000 0
			b	α_1,β_1,β_1	0.132 394 152 7
			c	β_1,α_1,β_1	
			d	β_1,β_1,α_1	
			e	α_2,β_2,β_2	0.125 939 180 5
			f	β_2,α_2,β_2	
			g	β_2,β_2,α_2	

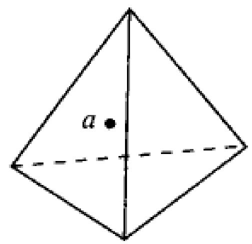
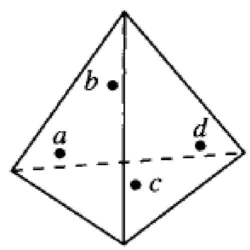
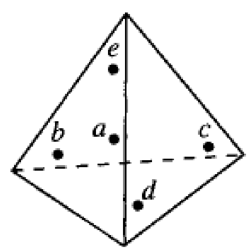
with
$\alpha_1 = 0.059\,715\,871\,7$
$\beta_1 = 0.470\,142\,064\,1$
$\alpha_2 = 0.797\,426\,985\,3$
$\beta_2 = 0.101\,286\,507\,3$

* Tabla extraída de [ZT2000]

Integración numérica en tetraedros

$$I=\int_0^1\int_0^{1-L_1}\int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1,L_2,L_3)\,dL_1dL_2dL_3 \approx \sum_{j=0}^{n} f(L_1^j,L_2^j,L_3^j)H_j$$

Table 9.3 Numerical integration formulae for tetrahedra

No.	Order	Figure	Error	Points	Tetrahedral coordinates	Weights
1	Linear		$R=O(h^2)$	a	$\frac14,\frac14,\frac14,\frac14$	1
2	Quadratic		$R=O(h^3)$	a	α,β,β,β	$\frac14$
				b	β,α,β,β	
				c	β,β,α,β	
				d	β,β,β,α	
					$\alpha=0.585\,410\,20$	
					$\beta=0.138\,196\,60$	
3	Cubic		$R=O(h^4)$	a	$\frac14,\frac14,\frac14,\frac14$	$-\frac45$
				b	$\frac12,\frac16,\frac16,\frac16$	$\frac{9}{20}$
				c	$\frac16,\frac12,\frac16,\frac16$	
				d	$\frac16,\frac16,\frac12,\frac16$	
				e	$\frac16,\frac16,\frac16,\frac12$	

* Tabla extraída de [ZT2000]

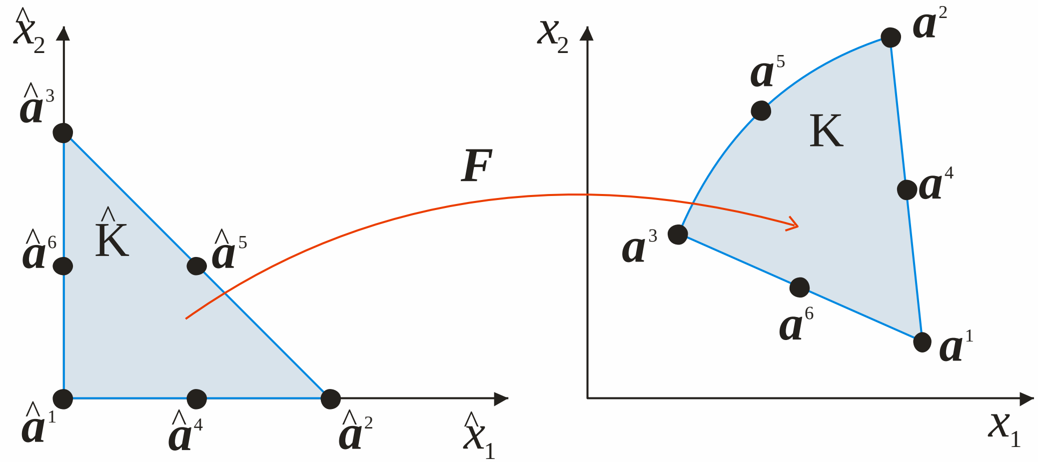
Ejemplo

Coordenadas de área en triángulo máster (unitario):

$$\hat{\lambda}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$$

$$\hat{\lambda}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = \hat{x}_1$$

$$\hat{\lambda}_3(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = \hat{x}_2$$



Funciones de base en elemento máster:

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = \hat{\lambda}_1\left(2\hat{\lambda}_1 - 1\right) = \left(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2\right)\left(1 - 2\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2\right)$$

$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = \hat{\lambda}_2\left(2\hat{\lambda}_2 - 1\right) = \hat{x}_1\left(2\hat{x}_1 - 1\right)$$

$$\hat{\varphi}_3(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = \hat{\lambda}_3\left(2\hat{\lambda}_3 - 1\right) = \hat{x}_2\left(2\hat{x}_2 - 1\right)$$

$$\hat{\varphi}_4(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 = 4\left(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2\right)\hat{x}_1$$

$$\hat{\varphi}_5(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = 4\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 = 4\hat{x}_1\hat{x}_2$$

$$\hat{\varphi}_6(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3 = 4\left(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2\right)\hat{x}_2$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{6} \hat{\varphi}_j(\hat{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{a}^j, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{K}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{6} \hat{\varphi}_j(\hat{\boldsymbol{x}}) \begin{Bmatrix} a_1^j \\ a_2^j \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{6} \hat{\varphi}_{\mathrm{k}}(\hat{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{a}^{k}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}}$$

$$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{Bmatrix} F_1(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ F_2(\hat{\boldsymbol{x}}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\varphi}_3 \\ \hat{\varphi}_4 \\ \hat{\varphi}_5 \\ \hat{\varphi}_6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathrm{k}}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{a}^{k}$$

$$\boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial \hat{\varphi}_5}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial \hat{\varphi}_5}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial \hat{\varphi}_6}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial \hat{\varphi}_6}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}_1} = -3 + 4\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}_2} = -3 + 4\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \hat{x}_1} = 4\hat{x}_1 - 1 \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \hat{x}_2} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \hat{x}_1} = 0 \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \hat{x}_2} = 4\hat{x}_2 - 1$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \hat{x}_1} = 4\left(1 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2\right) \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \hat{x}_2} = -4\hat{x}_1$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_5}{\partial \hat{x}_1} = 4\hat{x}_2 \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}_5}{\partial \hat{x}_2} = 4\hat{x}_1$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_6}{\partial \hat{x}_1} = -4\hat{x}_2 \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}_6}{\partial \hat{x}_2} = 4\left(1 - \hat{x}_1 - 2\hat{x}_2\right)$$

Ejemplo

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\, d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \approx \sum_{j=1}^{n} f(\hat{x}_1^j, \hat{x}_2^j) w_j$$

$$a_{ij}^{\mathrm{K}} = \int_{\hat{\mathrm{K}}} \left(\boldsymbol{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i\right) \cdot \left(\boldsymbol{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j\right) \left|\det \boldsymbol{J}\right| d\hat{x}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{n} \left(\boldsymbol{J}^{-T}(\hat{\boldsymbol{x}}^j) \nabla \hat{\varphi}_i(\hat{\boldsymbol{x}}^j)\right) \cdot \left(\boldsymbol{J}^{-T}(\hat{\boldsymbol{x}}^j) \nabla \hat{\varphi}_j(\hat{\boldsymbol{x}}^j)\right) w_j \left|\det \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{x}}^j)\right|$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}$$

```
function [row,col,sk] = stiffquad (in,xx,iel,conec,locel)
%
%  Generacion de la matriz de rigidez
%  Elemento cuadrangulo lineal isoparametrico p/problema conduccion de calor
%
%  in:    Numeros de nodo
%  xx:    Tabla de coordenadas
%  iel:   Numeros de elemento
%  conec: Tabla de conectividades
%  locel: Tabla de vectores de localizacion
%
nel = length (iel);

npgxi  = 2;
npgeta = 2;
%   Genera vector inn cuya componente "i" da la posicion donde se
%   almacenan las coordenadas del nodo "i" en la tabla "xx"

inn  = zeros(max(in),1);
for i=1:length(in)
    j      = in(i);
    inn(j) = i;
end

%   row, col, sk dan los indices de fila, columna y contenido de la matriz
%   de rigidez en almacenamiento sparse
row  = zeros(16*nel,1);
col  = zeros(16*nel,1);
sk   = zeros(16*nel,1);

in1 = 0;
X1 = zeros(4,1);
Y1 = zeros(4,1);
```

```
for iel = 1:nel

    for k=1:4
        X1(k) = xx(inn(conec(iel,k)),1);
        Y1(k) = xx(inn(conec(iel,k)),2);
    end

    K = zeros(4,4);
    for ipg = 1:npgxi*npgeta
        [xi, eta, weight] = integ2D (ipg, npgxi, npgeta);

        B     = 0.25*[        (1+eta),        -(1+eta),        -(1-eta),         (1-eta);
                       (1+xi)         ,   (1-xi)         ,-(1-xi)         ,  -(1+xi)          ];

        Jac     = B * [X1, Y1];
        dJac    = det(Jac);
        JacinvT = inv(Jac)';

        GradPhi = JacinvT*B;

        K = K + GradPhi'*GradPhi*dJac*weight;
    end

    for i = 1:4
        for j=1:4
            in1 = in1 + 1;
            row(in1) = inn(locel(iel,i));
            col(in1) = inn(locel(iel,j));
            sk(in1)  = K(i,j);
        end
    end
end
```

```
function [xi, eta, weight] = integ2D (ipg, npgxi, npgeta)

% calcula puntos de Gauss y pesos para integracion en cuadrangulo 2D

xpg = [ 0                  0                  0                  0                 ;
       -1/sqrt(3)          1/sqrt(3)          0.                 0.                ;
       -sqrt(0.6)          0.                 sqrt(0.6)          0.                ;
       -0.861136311594953 -0.339981043584856  0.339981043584856  0.861136311594953  ];

xw  = [ 2.                 0.                 0.                 0.                ;
        1.                 1.                 0.                 0.                ;
        5./9.              8./9.              5./9.              0.                ;
        0.347854845137454  0.652145154862546  0.652145154862546  0.347854845137454  ];

ipgxi  = rem  ((ipg-1),npgxi) + 1;
ipgeta = floor((ipg-1)/npgxi) + 1;

xi     = xpg(npgxi, ipgxi );
eta    = xpg(npgeta,ipgeta);
weight = xw(npgxi, ipgxi )*xw(npgeta,ipgeta);
```

Problema de Stokes

- Consideremos las ecuaciones de Stokes para el flujo estacionario de un fluido Newtoniano incompresible encerrado en un dominio $\Omega \subset ⍰^3$, sometido a una fuerza volumétrica $\boldsymbol{f}$:

$\boxed{\sigma_{ij,j} + f_i = 0}$	en Ω,	Balance de cant. de movto.	$\boldsymbol{u}$: velocidad
$\boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) - p\delta_{ij}}$	en Ω,	Ley const. de fluido Newtoniano	$\boldsymbol{\sigma}$: tensión
$u_{i,i} = 0$	en Ω,	Condición de incompresibilidad	p: presión
$u_i = 0$	sobre Γ,	CB Dirichlet	μ: viscosidad

$$\boxed{-\mu\Delta u_i + p_{,i} = f_i \quad \text{en } \Omega, \quad \text{Balance de cant. de movto. p/fluido Newtoniano}}$$

- Definimos el espacio de funciones de prueba

$$\mathrm{V} = \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \left[\mathrm{H}_0^1(\Omega) \right]^3 \text{ y } \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

- Luego, podemos llevar el problema de Stokes a la forma variacional

$$(V) \qquad \text{Hallar } \boldsymbol{u} \in \mathrm{V} \,/\, \mathrm{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathrm{L}(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$$

Forma variacional del problema de Stokes

- Para llevar el problema de Stokes a la forma variacional hacemos

$$f_i = -\Delta u_i + p_{,i}$$

$$\int_\Omega f_i v_i dx = -\mu \int_\Omega \Delta u_i v_i dx + \int_\Omega p_{,i} v_i dx$$

$$\int_\Omega f_i v_i dx = \mu \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx - \underbrace{\mu \int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i ds}_{=0} - \underbrace{\int_\Omega p v_{i,i} dx}_{=0} + \underbrace{\int_\Gamma p n_i v_i ds}_{=0}$$

$$\underbrace{\int_\Omega f_i v_i dx}_{\mathrm{L}(\boldsymbol{v})} = \underbrace{\mu \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx}_{\mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$$

- Dado que $\mu > 0$, se demuestra (ídem problema de Poisson) que a(**.**,**.**) es simétrica, contínua y V-elíptica.
- Se demuestra también (ídem problema de Poisson) que L(**.**) es continua.
- **Nota:** al adoptar un espacio de velocidades de divergencia nula, la formulación variacional no involucra la presión.

MEF aplicado al problema de Stokes

Consideremos el problema de Stokes en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Luego:

$$\mathrm{V} = \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \left[\mathrm{H}_0^1(\Omega) \right]^2 \text{ y } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

- Si Ω es simplemente conexo (i.e., no contiene agujeros), div $\boldsymbol{v}$=0 en Ω si y solo si

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \mathrm{rot}\varphi \text{ para alguna función } \varphi.$$

$$\varphi : \text{función de corriente del campo de velocidades } \boldsymbol{v}.$$

o sea: $\boldsymbol{v} \in \mathrm{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\varphi, \ \varphi \in \mathrm{H}_0^2(\Omega).$

- Adoptamos luego un subespacio W_h de dimensión finita de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ (usamos por ej. el elemento finito C^1-continuo ya visto) y definimos $\mathrm{V}_h = \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\varphi, \varphi \in \mathrm{W}_h \right\}$.
- Se formula el MEF remplazando V por $\mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$ en la formulación variacional. La solución $\boldsymbol{u}_h \in \mathrm{V}_h$ satisface

$$\left\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C h^4 \left| \boldsymbol{u} \right|_{\mathrm{H}^5(\Omega)}$$

MEF aplicado al problema de Stokes

En el capítulo 5 mostramos que la expresión de la matriz de rigidez resulta:

$$\boldsymbol{K} = \mu \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{-T} \underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial y^2} \right) dx}_{\text{no nulos últimos } 18\times 18 \text{ (primeros tres términos, constante, lineal en x,y, nulos)}} \; \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{L}$$

donde:

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^2}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2}x' & \frac{2}{L^2}y' & 0 & 0 & \frac{12}{L^2}x'^2 & \frac{6}{L^2}x'y' & \frac{2}{L^2}y'^2 & 0 & 0 & \frac{20}{L^2}x'^3 & \frac{12}{L^2}x'^2y' & \frac{6}{L^2}x'y'^2 & \frac{2}{L^2}y'^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x \partial y}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2}{L^2}x' & \frac{2}{L^2}y' & 0 & 0 & \frac{3}{L^2}x'^2 & \frac{4}{L^2}x'y' & \frac{3}{L^2}y_2'^2 & 0 & 0 & \frac{4}{L^2}x'^3 & \frac{6}{L^2}x'^2y' & \frac{6}{L^2}x'y'^2 & \frac{4}{L^2}y'^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial y^2}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2}{L^2}x' & \frac{6}{L^2}y' & 0 & 0 & \frac{2}{L^2}x'^2 & \frac{6}{L^2}x'y' & \frac{12}{L^2}y'^2 & 0 & 0 & \frac{2}{L^2}x'^3 & \frac{6}{L^2}x'^2y' & \frac{12}{L^2}x'y'^2 & \frac{20}{L^2}y'^3 \end{bmatrix}$$

y donde la integral se debe realizar en el elemento triangular. Los términos $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{L}$ ya fueron calculados y su expresión está en el cap 5.

Para calcular esta integral, recurrimos a integración numérica.

MEF aplicado al problema de Stokes

Para ello:

$$\int_K \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial y^2} \right) d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial y^2} \right) \left| \det \boldsymbol{J} \right| d\hat{\boldsymbol{x}}$$

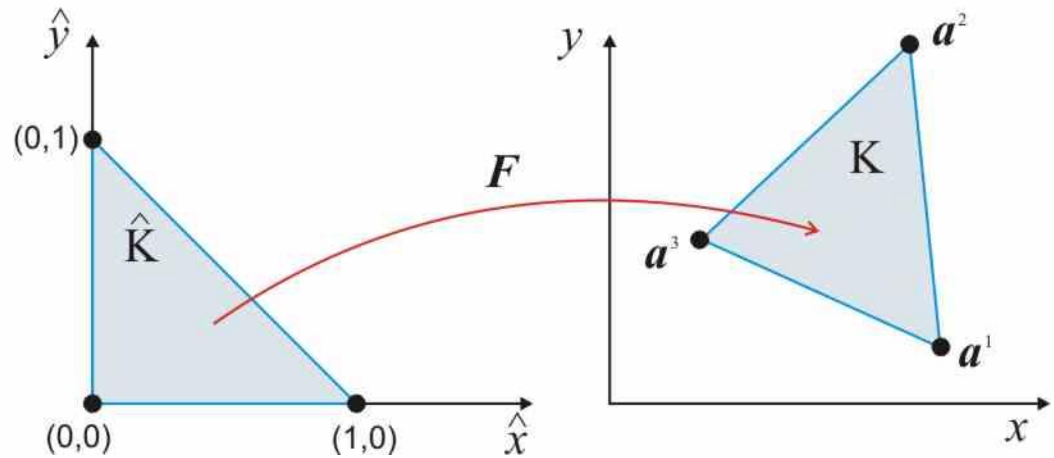
$$\approx \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}^T}{\partial y^2} \right) (x^j, y^j) \left| \det \boldsymbol{J} \right| w_j$$

Coordenadas de área en triángulo máster (unitario):

$$\hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$$

$$\hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$$

$$\hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$$



MEF aplicado al problema de Stokes

Transformación geometría del elemento master al plano físico:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{3} \hat{\lambda}_j(\hat{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{a}^j, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathrm{K}}$$

$$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{Bmatrix} F_x(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ F_y(\hat{\boldsymbol{x}}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^1 & a_x^2 & a_x^3 \\ a_y^1 & a_y^2 & a_y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \hat{\lambda}_k}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{a}^k$$

$$\boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_x}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial F_x}{\partial \hat{y}} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial F_y}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^1 & a_x^2 & a_x^3 \\ a_y^1 & a_y^2 & a_y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial \hat{y}} \\ \dfrac{\partial \hat{\lambda}_2}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_2}{\partial \hat{y}} \\ \dfrac{\partial \hat{\lambda}_3}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_3}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^1 & a_x^2 & a_x^3 \\ a_y^1 & a_y^2 & a_y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_x^2 - a_x^1) & (a_x^3 - a_x^1) \\ (a_y^2 - a_y^1) & (a_y^3 - a_y^1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} b_x^2 & b_x^3 \\ b_y^2 & b_y^3 \end{bmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{J} = b_x^2 b_y^3 - b_y^2 b_x^3 = 2A_K$$

```
function [row,col,sk] = stiffcurStokesScaled (in,xx,iel,conec,locel)
%
%  Generacion de la matriz de rigidez
%  Elemento triangulo C1 para problema Stokes
%  Elemento escalado para evitar mal condicionamiento
%
%  in:    Numeros de nodo
%  xx:    Tabla de coordenadas
%  iel:   Numeros de elemento
%  conec: Tabla de conectividades
%  locel: Tabla de vectores de localizacion
%
nel = length (iel);

%   Genera vector inn cuya componente "i" da la posicion donde se
%   almacenan las coordenadas del nodo "i" en la tabla "xx"

inn  = zeros(max(in),1);
for i=1:length(in)
    j      = in(i);
    inn(j) = i;
end

%   Cantidad de puntos de Gauss

npgtri = 7;

%   row, col, sk dan los indices de fila, columna y contenido de la matriz
%   de rigidez en almacenamiento sparse
```

```
%   row, col, sk dan los indices de fila, columna y contenido de la matriz
%   de rigidez en almacenamiento sparse

row  = zeros(18*18*nel,1);
col  = zeros(18*18*nel,1);
sk   = zeros(18*18*nel,1);

in1 = 0;
for iel = 1:nel

    x1 = xx(inn(conec(iel,1)),1);
    y1 = xx(inn(conec(iel,1)),2);
    x2 = xx(inn(conec(iel,2)),1);
    y2 = xx(inn(conec(iel,2)),2);
    x3 = xx(inn(conec(iel,3)),1);
    y3 = xx(inn(conec(iel,3)),2);

    x0 = (x1+x2+x3)/3;
    y0 = (y1+y2+y3)/3;

    x1 = x1-x0;  x2 = x2 - x0;  x3 = x3 - x0;
    y1 = y1-y0;  y2 = y2 - y0;  y3 = y3 - y0;

    L =  0.5 * max ([ sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2),
                      sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2),
                      sqrt((x1-x3)^2+(y1-y3)^2) ]);

    %  P = Integ (d2px2*d2px2' + 2*d2pxy*d2pxy' + d2py2*d2py2')
    %  ------------------------------------------------------
```

```
%  P = Integ (d2px2*d2px2' + 2*d2pxy*d2pxy + d2py2*d2py2)
%  ------------------------------------------------------
P = zeros(18,18);
for ipg = 1:npgtri
    [xG, yG, weight] = integtri (ipg, x1, y1, x2, y2, x3, y3, npgtri);

    d2pdx2  = [2 0 0 6*xG 2*yG  0    0  12*xG^2 6*xG*yG  2*yG^2   0       0  ...
        20*xG^3 12*xG^2*yG 6*xG*yG^2  2*yG^3      0          0]'  /  L^2;
    d2pdxdy = [0 1 0  0   2*xG 2*yG  0    0      3*xG^2 4*xG*yG 3*yG^2    0  ...
         0       4*xG^3   6*xG^2*yG 6*xG*yG^2  4*yG^3      0]'  /  L^2;
    d2pdy2  = [0 0 2  0    0   2*xG 6*yG  0         0    2*xG^2 6*xG*yG 12*yG^2 ...
         0        0         2*xG^3   6*xG^2*yG 12*xG*yG^2 20*yG^3]'  /  L^2;

    P = P + (d2pdx2*d2pdx2' + 2*d2pdxdy*d2pdxdy' + d2pdy2*d2pdy2')*weight;
end

%  Matriz A
%  --------
A = zeros(21,21);
A(1,:) = [         1,       (x1),       (y1),...
    x1^2,     x1*y1,      y1^2,...
    x1^3,   x1^2*y1,   x1*y1^2,      y1^3,...
    x1^4,   x1^3*y1, x1^2*y1^2,   x1*y1^3,      y1^4,...
    x1^5,   x1^4*y1, x1^3*y1^2, x1^2*y1^3,   x1*y1^4,      y1^5];
A(2,:) = [           0,            1,            0,...
    2*x1,        (y1),           0,...
    3*x1^2,     2*x1*y1,        y1^2,           0,...
    4*x1^3,   3*x1^2*y1,   2*x1*y1^2,      y1^3,          0,...
    5*x1^4,   4*x1^3*y1, 3*x1^2*y1^2,   2*x1*y1^3,        y1^4,        0];
```

```
    4*x1^3,   3*x1^2*y1,   2*x1*y1^2,        y1^3,             0,...
    5*x1^4,   4*x1^3*y1, 3*x1^2*y1^2,   2*x1*y1^3,         y1^4,         0];
A(3,:) = [           0,            0,            1,...
    0,         (x1),        2*y1,...
    0,         x1^2,     2*x1*y1,      3*y1^2,...
    0,         x1^3,   2*x1^2*y1,   3*x1*y1^2,      4*y1^3,...
    0,         x1^4,   2*x1^3*y1, 3*x1^2*y1^2,   4*x1*y1^3,      5*y1^4];
A(4,:) = [          0,           0,           0,...
    2,           0,           0,...
    6*x1,        2*y1,           0,           0,...
    12*x1^2,     6*x1*y1,     2*y1^2,           0,           0,...
    20*x1^3, 12*x1^2*y1,  6*x1*y1^2,     2*y1^3,           0,           0];
A(5,:) = [         0,          0,          0,...
    0,          1,          0,...
    0,       2*x1,       2*y1,          0,...
    0,     3*x1^2,    4*x1*y1,     3*y1^2,          0,...
    0,     4*x1^3, 6*x1^2*y1, 6*x1*y1^2,     4*y1^3,         0];
A(6,:) = [          0,           0,           0,...
    0,           0,           2,...
    0,           0,        2*x1,        6*y1,...
    0,           0,      2*x1^2,     6*x1*y1,    12*y1^2,...
    0,           0,      2*x1^3,   6*x1^2*y1, 12*x1*y1^2,    20*y1^3];


A(7,:) = [         1,       (x2),       (y2),...
    x2^2,      x2*y2,       y2^2,...
    x2^3,   x2^2*y2,   x2*y2^2,       y2^3,...
    x2^4,   x2^3*y2, x2^2*y2^2,   x2*y2^3,       y2^4,...
    x2^5,   x2^4*y2, x2^3*y2^2, x2^2*y2^3,   x2*y2^4,       y2^5];
A(8,:) = [           0,           1,           0,...
    2*x2,        (y2),           0,...
```

```
    0,     4*x3^3, 6*x3^2*y3, 6*x3*y3^2,     4*y3^3,          0];
A(18,:) = [           0,           0,           0,...
    0,           0,           2,...
    0,           0,        2*x3,        6*y3,...
    0,           0,      2*x3^2,     6*x3*y3,     12*y3^2,...
    0,           0,      2*x3^3,   6*x3^2*y3, 12*x3*y3^2,     20*y3^3];

x12 = (x1 + x2)/2;
y12 = (y1 + y2)/2;
l12 = sqrt((y2-y1)^2 +(x2-x1)^2);
u12 =  (y2-y1)/l12;
v12 = -(x2-x1)/l12;
A(19,:) = ...
[ 0,             u12,                        v12,                        ...
  2*u12*x12,     u12*y12+v12*x12,            2*v12*y12,                  ...
  3*u12*x12^2,   2*u12*x12*y12+v12*x12^2,    u12*y12^2+2*v12*x12*y12,    ...
  3*v12*y12^2,   4*u12*x12^3,                3*u12*x12^2*y12+v12*x12^3,...
  2*u12*x12*y12^2+2*v12*x12^2*y12,         u12*y12^3+3*v12*x12*y12^2,    ...
  4*v12*y12^3,   5*u12*x12^4,               4*u12*x12^3*y12+v12*x12^4,...
  3*u12*x12^2*y12^2+2*v12*x12^3*y12,  2*u12*x12*y12^3+3*v12*x12^2*y12^2,...
  u12*y12^4+4*v12*x12*y12^3,                  5*v12*y12^4];

x23 = (x2 + x3)/2;
y23 = (y2 + y3)/2;
l23 = sqrt((y3-y2)^2 +(x3-x2)^2);
u23 =  (y3-y2)/l23;
v23 = -(x3-x2)/l23;
A(20,:) = ...
[ 0,              u23,                        v23,                        ...
  2*u23*x23,      u23*y23+v23*x23,            2*v23*y23,                  ...
```

```
u23 =  (y3-y2)/l23;
v23 = -(x3-x2)/l23;
A(20,:) = ...
[ 0,              u23,                          v23,                     ...
  2*u23*x23,      u23*y23+v23*x23,              2*v23*y23,               ...
  3*u23*x23^2,    2*u23*x23*y23+v23*x23^2,      u23*y23^2+2*v23*x23*y23,...
  3*v23*y23^2,    4*u23*x23^3,                  3*u23*x23^2*y23+v23*x23^3,...
  2*u23*x23*y23^2+2*v23*x23^2*y23,              u23*y23^3+3*v23*x23*y23^2,...
  4*v23*y23^3,    5*u23*x23^4,                  4*u23*x23^3*y23+v23*x23^4,...
  3*u23*x23^2*y23^2+2*v23*x23^3*y23,  2*u23*x23*y23^3+3*v23*x23^2*y23^2,...
  u23*y23^4+4*v23*x23*y23^3,                    5*v23*y23^4];

x31 = (x3 + x1)/2;
y31 = (y3 + y1)/2;
l31 = sqrt((y1-y3)^2 +(x1-x3)^2);
u31 =  (y1-y3)/l31;
v31 = -(x1-x3)/l31;
A(21,:) = ...
[ 0,              u31,                          v31,                     ...
  2*u31*x31,      u31*y31+v31*x31,              2*v31*y31,               ...
  3*u31*x31^2,    2*u31*x31*y31+v31*x31^2,      u31*y31^2+2*v31*x31*y31,...
  3*v31*y31^2,    4*u31*x31^3,                  3*u31*x31^2*y31+v31*x31^3,...
  2*u31*x31*y31^2+2*v31*x31^2*y31,              u31*y31^3+3*v31*x31*y31^2,...
  4*v31*y31^3,    5*u31*x31^4,                  4*u31*x31^3*y31+v31*x31^4,...
  3*u31*x31^2*y31^2+2*v31*x31^3*y31,   2*u31*x31*y31^3+3*v31*x31^2*y31^2,...
  u31*y31^4+4*v31*x31*y31^3,                    5*v31*y31^4];

A1 = inv(A);
if (iel==nel)
    cond(A)
end
```

```
        A1 = inv(A);
        if (iel==nel)
            cond(A)
        end
        A1 = A1 * diag([1 L L L^2 L^2 L^2 1 L L L^2 L^2 L^2 1 L L L^2 L^2 L^2 L L L]);

        D1 = [0 u12 v12 0 0 0   0 u12 v12 0 0 0   0  0    0   0 0 0;
              0  0   0  0 0 0   0 u23 v23 0 0 0   0 u23 v23 0 0 0;
              0 u31 v31 0 0 0   0  0   0  0 0 0   0 u31 v31 0 0 0 ]/2;
        B  = A1(4:21,1:18) + A1(4:21,19:21)*D1;

        % Viscosidad (poner en datos)
        mu = 0.3;

        %  Matriz de rigidez
        %  -----------------
        K = mu*B'*P*B;

        for i = 1:18
            for j=1:18
                in1 = in1 + 1;
                row(in1) = locel(iel,i);
                col(in1) = locel(iel,j);
                sk(in1)  = K(i,j);
            end
        end
    end
```

Elementos infinitos

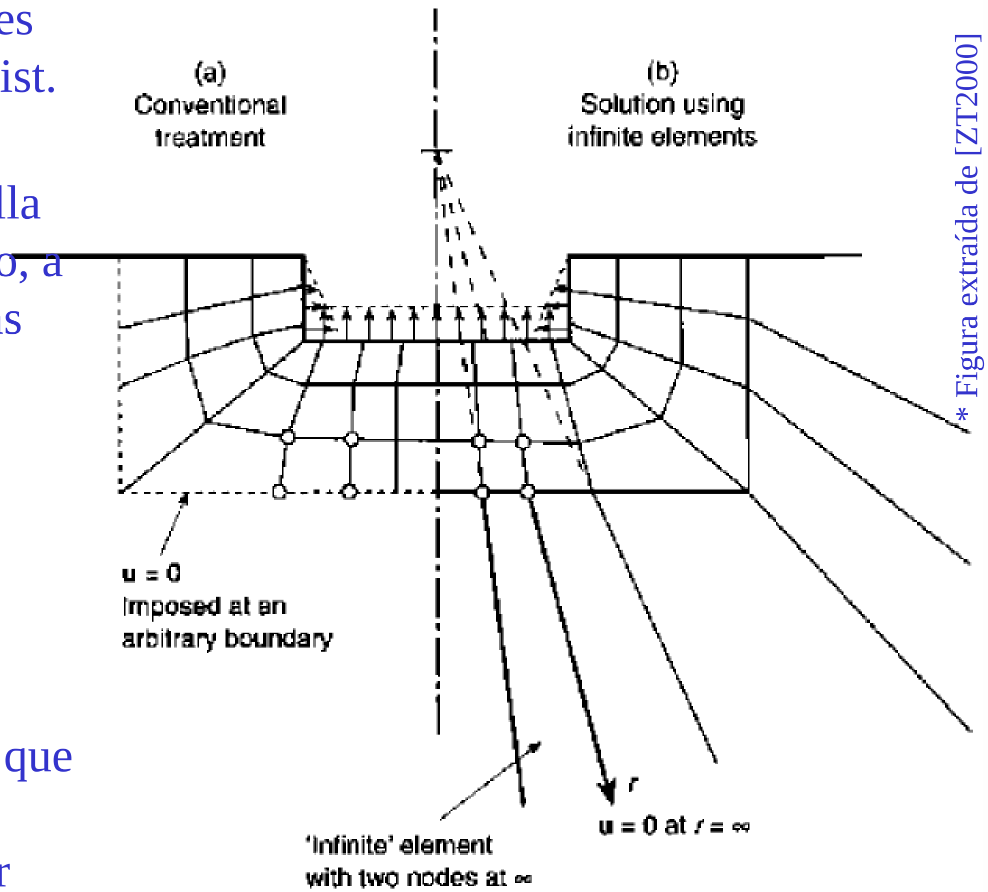
En muchos problemas ingenieriles, el dominio es infinito o semi-infinito, y se especifican CB a dist. infinita.

1.<u>Solución usando MEF convencional</u>: se malla una porción suficientemente grande del dominio, a fin de imponer las CB a una dist. grande, con las sigtes. desventajas.

•Si esa dist. no es lo suficientemente grande, se introduce un error en el modelo.

•Se deben introducir muchos elementos en una región que suele ser de poco interés para el analista.

2.<u>Solución usando elementos infinitos</u>, en los que un mapeo particular, permite transformar elementos semi-infinitos a los elementos master básicos. Estos elementos se ensamblan luego con los elementos finitos de la malla.

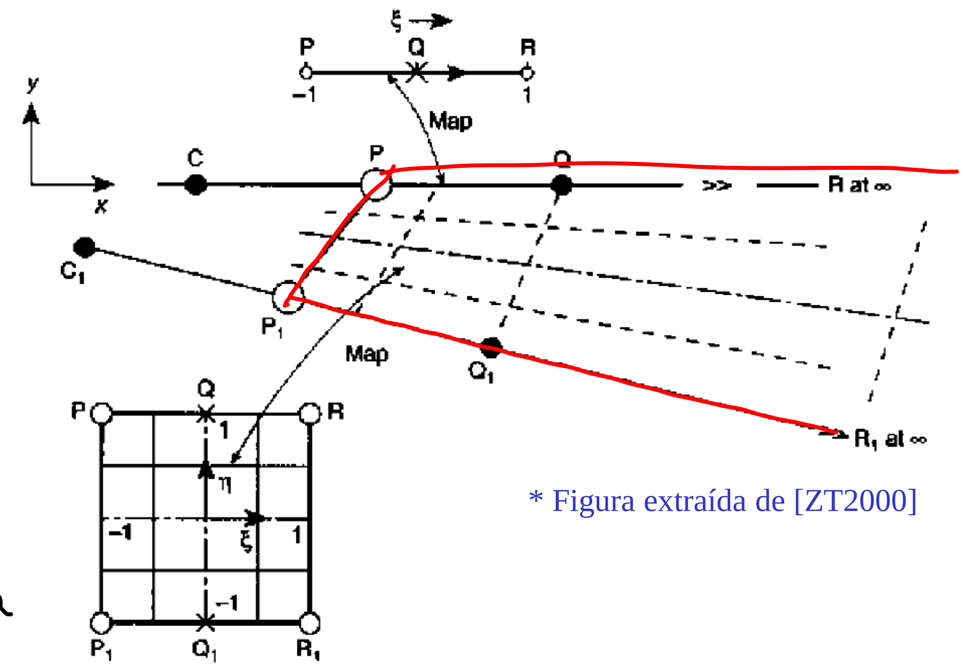


* Figura extraída de [ZT2000]

Elementos infinitos

- Consideremos el mapeo 1D a lo largo de CPQ:

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi}x_C + \left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_Q = \bar{N}_C x_C + \bar{N}_Q x_Q \quad \textbf{(1)}$$



* Figura extraída de [ZT2000]

- Se observa que:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_C + x_Q}{2} = x_P & \text{si } \xi = -1 \\ x = x_Q & \text{si } \xi = 0 \\ x = x_R \to \infty & \text{si } \xi \to 1 \end{cases}$$

- Luego, remplazando x_C por x_P:

$x_c = 2x_P - x_Q$

$$x = \left(1+\frac{2\xi}{1-\xi}\right)x_Q - \frac{2\xi}{1-\xi}x_P = N_Q x_Q + N_P x_P \quad \textbf{(2)}$$

- Muchas otras funciones podrían usarse en (1) y (2), siempre que $\bar{N}_C + \bar{N}_Q = N_P + N_Q = 1$.

$$x = x_Q + \frac{\xi}{1-\xi}(x_Q - x_C)$$

Elementos infinitos (cont.)

- Ahora, si aproximamos la solución por un polinomio:

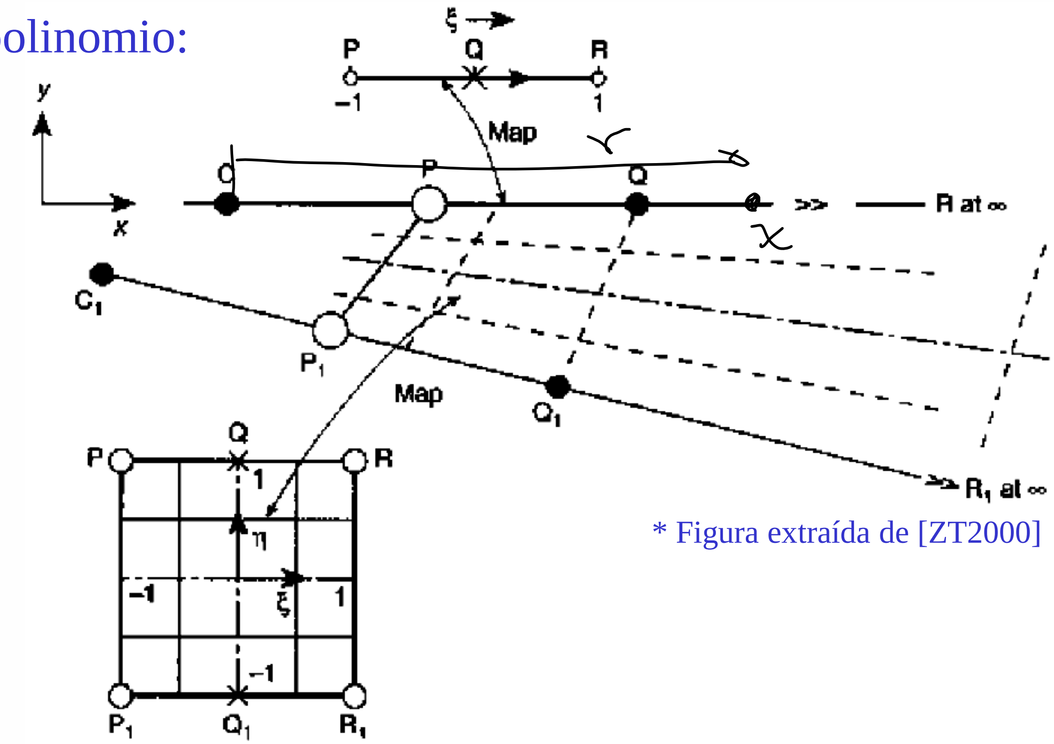
$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \ldots$$

- Dado $x = -\dfrac{\xi}{1-\xi} x_C + \left(1 + \dfrac{\xi}{1-\xi}\right) x_Q$

$$\Rightarrow \xi = 1 - \frac{x_Q - x_C}{x - x_C} = 1 - \frac{x_Q - x_C}{r}$$

- Obtenemos entonces la solución típica de campo lejano para regiones exteriores:

$$u = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \ldots$$



* Figura extraída de [ZT2000]

- El punto C representa el origen de decaimiento. Su correcta ubicación en base a la física del problema permite mejorar la precisión de la solución.
- Equivalentemente, a lo largo de $C_1P_1Q_1$ tenemos el mapeo

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_{Q_1}, \qquad y = -\frac{\xi}{1-\xi} y_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) y_{Q_1}$$

Elementos infinitos (cont.)

- El mapeo se completa en la dirección η usando las funciones de forma lineales standard

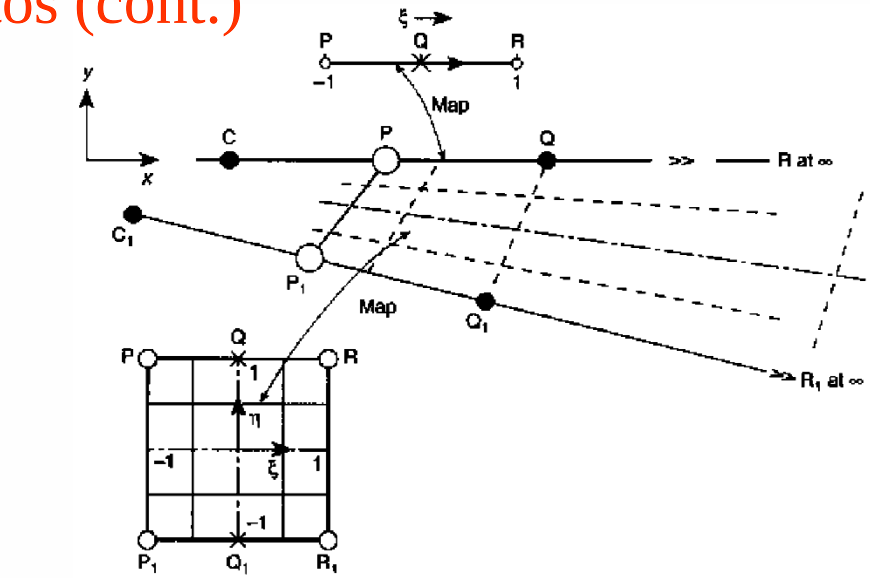
$$N_1(\eta)=\frac{1+\eta}{2},\; N_0(\eta)=\frac{1-\eta}{2}.$$

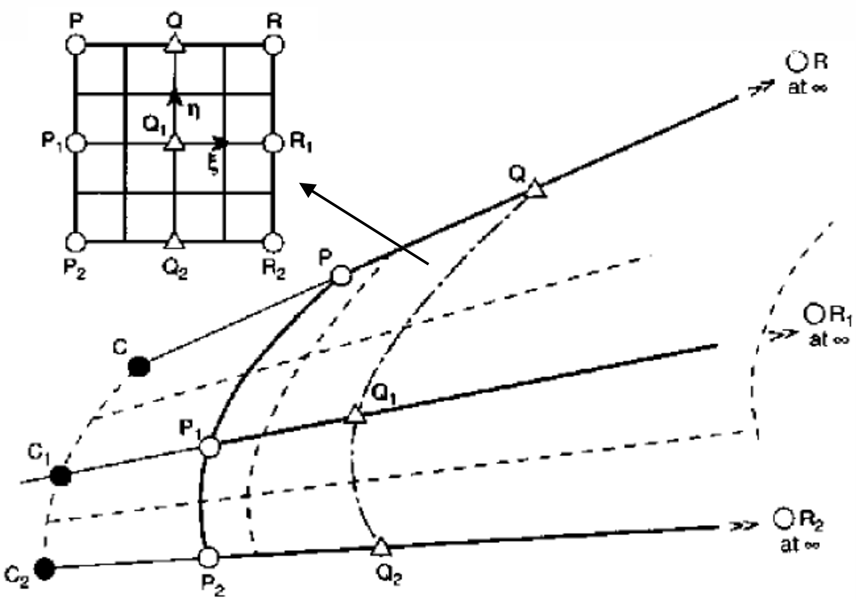
- Luego:

$$x=N_1(\eta)\left[-\frac{\xi}{1-\xi}x_{\mathrm{C}}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_{\mathrm{Q}}\right]$$
$$+N_0(\eta)\left[-\frac{\xi}{1-\xi}x_{\mathrm{C}_1}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_{\mathrm{Q}_1}\right]$$

$$y=N_1(\eta)\left[-\frac{\xi}{1-\xi}y_{\mathrm{C}}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)y_{\mathrm{Q}}\right]$$
$$+N_0(\eta)\left[-\frac{\xi}{1-\xi}y_{\mathrm{C}_1}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)y_{\mathrm{Q}_1}\right]$$

- En dirección η podrían usarse funciones de mayor orden, lo que permite ensamblar elementos infinitos con elementos finitos de mayor orden.

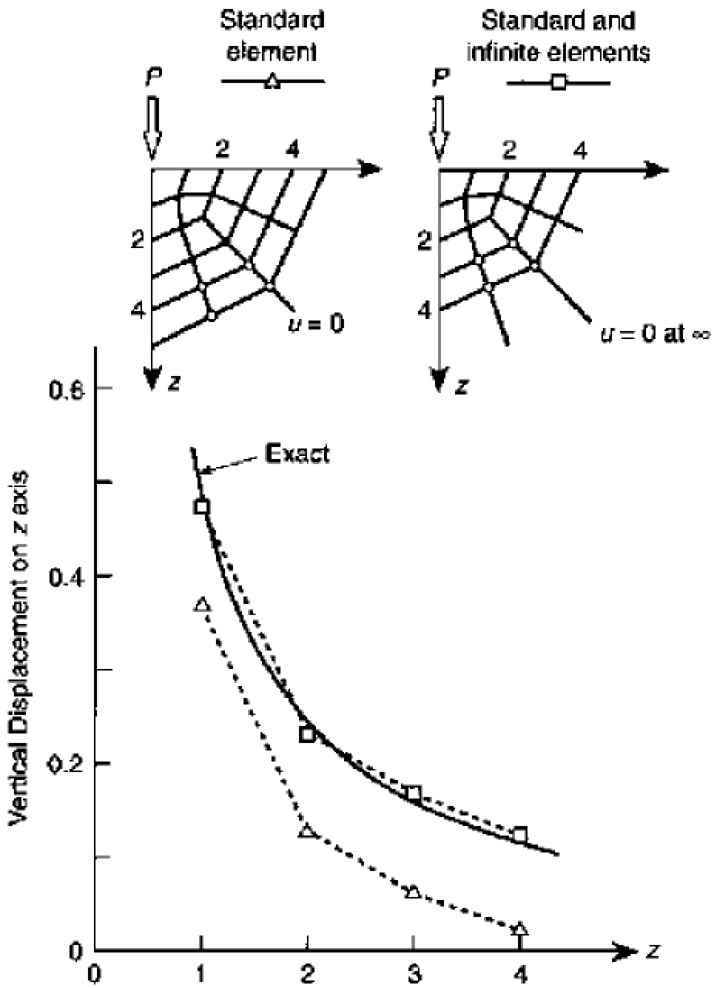




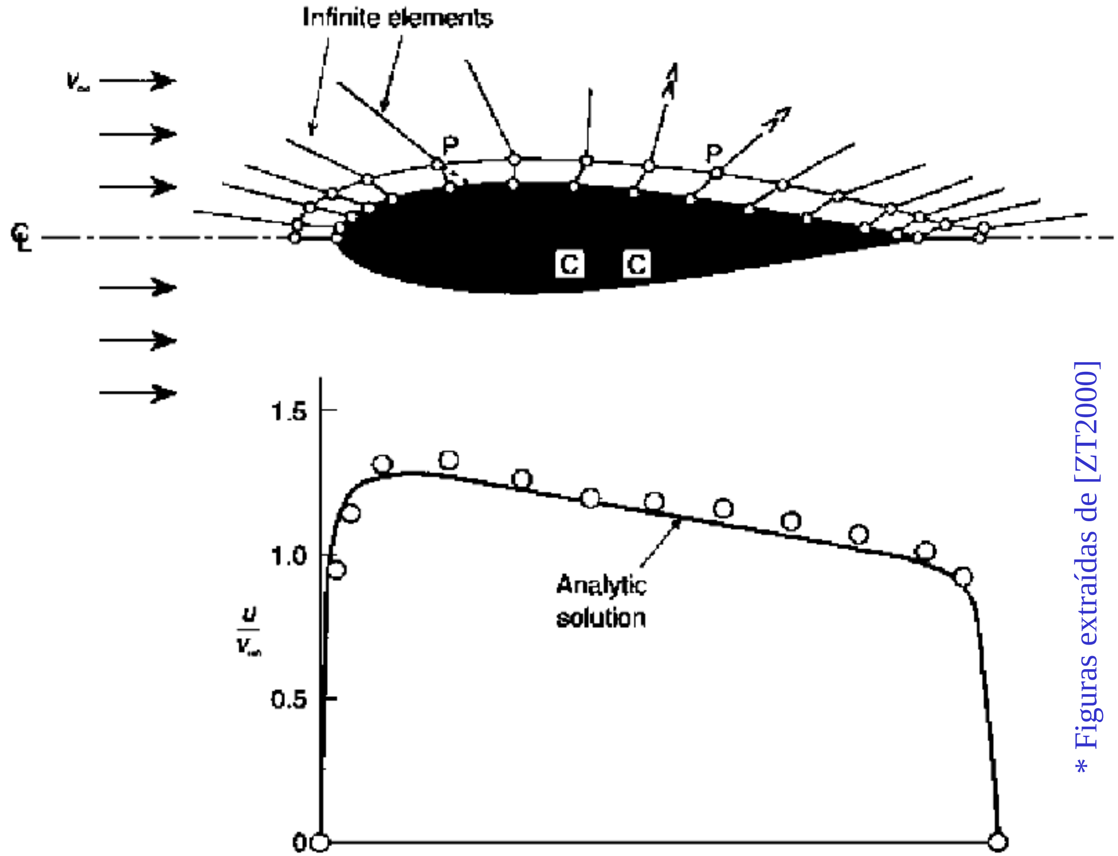
* Figuras extraídas de [ZT2000]

Ejemplos de aplicación de elementos infinitos

Problema de Boussinesq: carga puntual en un medio semi-infinito



Flujo irrotacional alrededor de un ala



* Figuras extraídas de [ZT2000]