

# Introducción al Método de los Elementos Finitos

## Parte 4

### Estimación de error en problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

21/Oct/14

## Estimación de error en problemas elípticos

- Para un problema elíptico típico de la forma

$$\text{Hallar } u \in V \quad / \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

donde se verifica

1.  $a(.,.)$  es una forma bilineal simétrica, continua y  $V$ -elíptica.
2.  $L(.)$  es una forma lineal continua

resulta

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in V$$

- Si elegimos  $v = \pi_h u \in V$  como un interpolante de  $u$  y estimamos el error de interpolación  $\|u - \pi_h u\|_V$ , obtendremos una estimación del error  $\|u - u_h\|_V$  del MEF.
- Elegimos  $\pi_h u$  tal que sus gdl coincidan con los de  $u$  en  $V_h$ , así el problema de determinar  $\|u - \pi_h u\|_V$  se reduce a determinar  $u - \pi_h u$  individualmente sobre cada elemento finito  $K \in T_h$ .

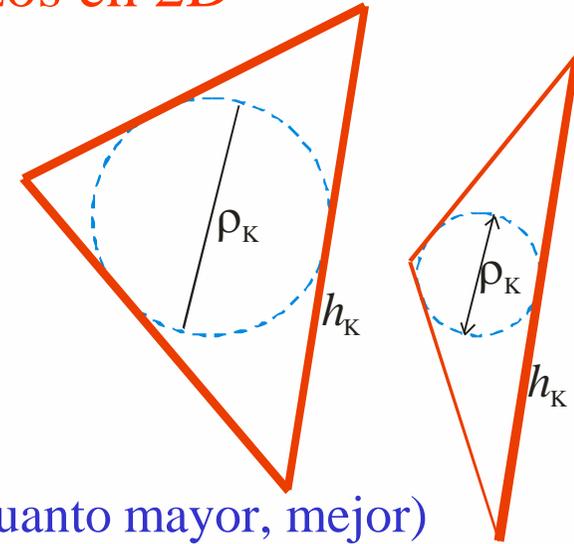
## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D

• Sea  $V=H^1(\Omega)$ ,  $V_h = \{v \in V: v|_K \in P^1(K), \forall K \in \mathbf{T}_h\}$

• Para c/triángulo  $K \in \mathbf{T}_h$ , definimos

$h_K$ : diámetro de  $K$  = lado más largo de  $K$

$\rho_K$ : diámetro del mayor círculo inscripto en  $K$



Veremos  $\rho_K/h_K$  da una idea de la calidad del elemento (cuanto mayor, mejor)

• Designemos  $\mathbf{T}_h$  a una familia de mallas  $\{\mathbf{T}_h\}$  indexadas por el parámetro  $h = \max_{K \in \mathbf{T}_h} h_K$

• Asumimos  $\exists$  una constante  $\beta \in \mathbb{R}^+$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta \quad \forall K \in \mathbf{T}_h$$

Esta condición implica que los triángulos  $K \in \mathbf{T}_h$  no pueden ser arbitr. finos.  
La constante  $\beta$  es una medida del ángulo más pequeño para cualquier  $K \in \mathbf{T}_h$ .

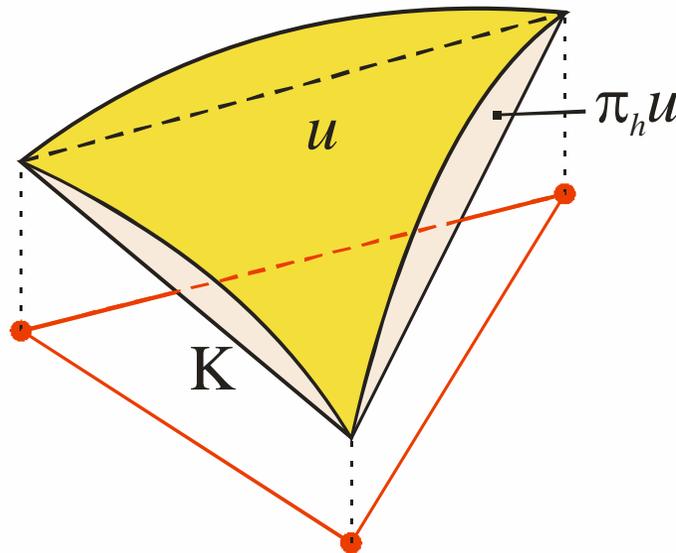
## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- Sean  $N_i$ ,  $i=1,2,\dots,M$ , los nodos de  $T_h$ . Dado  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ , definimos el interpolante  $\pi_h u \in V_h$  por

$$\pi_h v(\mathbf{x}^i) = v(\mathbf{x}^i) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

i.e,  $\pi_h u$  es la función lineal a trozos que coincide con  $u$  en los nodos  $\mathbf{x}^i$  de  $T_h$ .

- Empecemos por estimar el error  $u - \pi_h u$  en cada triángulo  $K$ .



## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- **Teorema** Sea  $K \in T_h$  un triángulo de vértices  $\mathbf{x}^i$ ,  $i=1,2,3$ . Dado  $v \in C^0(K)$ , sea el interpolante  $\pi v \in P_1(K)$  definido por  $\pi v(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x}_i)$ ,  $i=1,2,3$ .

Luego:

$$1. \quad \|v - \pi v\|_{L_\infty(K)} \leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}$$

$$2. \quad \max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha (v - \pi v)\|_{L_\infty(K)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}$$

donde 
$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

$$\|v\|_{L_\infty(K)} = \max_{\mathbf{x} \in K} |v(\mathbf{x})|$$

**Nota:** la magnitud de los errores de interpolación en la función y sus derivadas primeras dependen del valor de las derivadas segundas, que es una medida de la curvatura de la superficie descrita por la función.

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

### Dem

- Como  $\pi v \in P_1(K)$ , usando las funciones de base  $\lambda_i$  podemos escribir

$$\pi v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) \pi v(\mathbf{x}^i) \equiv \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}^i)$$

- Usando una expansión de Taylor, en el punto  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \Delta$  tenemos

$$v(\mathbf{y}) = v(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) (y_j - x_j) + R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \xi \Delta) \cdot (y_i - x_i) \cdot (y_j - x_j) \quad 0 < \xi < 1$$

- Tomando  $\mathbf{y} = \mathbf{x}^i$ :
 
$$v(\mathbf{x}^i) = v(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) (x_j^i - x_j)}_{p_i(\mathbf{x})} + \underbrace{R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^i)}_{R_i(\mathbf{x})} \quad (*)$$

- Como  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\| \leq h_K \quad \forall \mathbf{x} \in K, i=1,2,3$ , el resto  $R_i(\mathbf{x})$  resulta acotado por

$$|R_i(\mathbf{x})| \leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)} \quad \forall \mathbf{x} \in K, i=1,2,3$$

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- Luego, multiplicando por  $\lambda_i(\mathbf{x})$  en (\*):

$$\pi v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}^i) = v(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) R_i(\mathbf{x})$$

- Veremos luego que:  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i = 0.$

$$\Rightarrow \pi v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) R_i(\mathbf{x})$$

- En consecuencia:

$$|v(\mathbf{x}) - \pi v(\mathbf{x})| = \left| \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) R_i(\mathbf{x}) \right| \leq \sum_{i=1}^3 |\lambda_i(\mathbf{x})| |R_i(\mathbf{x})| \leq \max_i |R_i(\mathbf{x})| \underbrace{\sum_{i=1}^3 |\lambda_i(\mathbf{x})|}_1$$

$$\leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)} \quad \forall \mathbf{x} \in K$$

(QED 1)

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

• La derivada de  $\pi v$  :

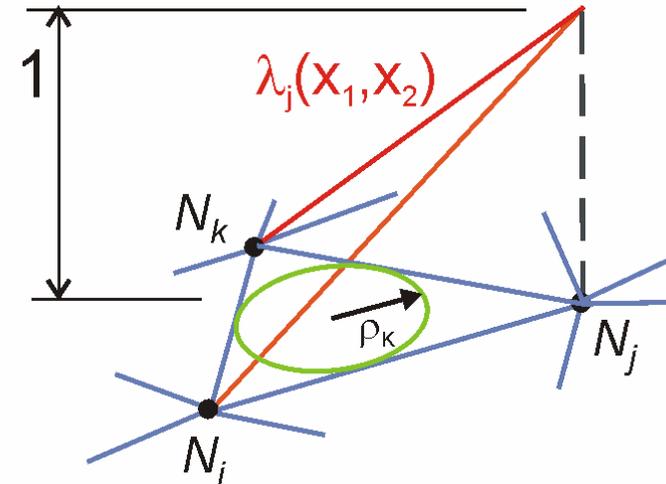
$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}^i) = v(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) R_i(\mathbf{x})$$

• Veremos luego que :  $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} p_i = \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \pi v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} R_i$

• En consecuencia:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi v}{\partial x_j} \right| = \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} R_i(\mathbf{x}) \right| \leq \sum_{i=1}^3 \underbrace{\max_{\mathbf{x} \in K} \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \right|}_{\leq 1/\rho_K} |R_i(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\rho_K} \sum_{i=1}^3 |R_i(\mathbf{x})|$$

$$\leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)} \quad \forall \mathbf{x} \in K$$



(QED 2)

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

**Lema** Para  $j=1,2$   $\mathbf{x} \in K$  tenemos:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1}_A, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i = 0}_B, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = 0}_C, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} p_i = \frac{\partial v}{\partial x_j}}_D$$

**Dem**

• Notar  $\pi v = v$  si  $v \in P_1(K)$ . Luego, eligiendo  $v = 1$  en :

$$\pi v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{x}_i) \lambda_i(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x})$$

(QED A)

• Derivando la anterior :

$$0 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

(QED C)

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- Recordamos :

$$\pi v = v \sum_{i=1}^3 \lambda_i + \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i + \sum_{i=1}^3 \lambda_i R_i \qquad p_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) (x_j^i - x_j)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathbf{x}) (x_k^i - x_k) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k^i - \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k = \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_k} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_k^i}_{x_k} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}_1 = 0 \end{aligned}$$

(QED B)

$x_k \in P_1(K)$  (función lineal) luego se expande exactamente en la base  $\lambda_i(x)$

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- De manera similar :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} p_i &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathbf{x}) (x_k^i - x_k) = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k^i - \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k = \\
 &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_k} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} x_k^i}_{\delta_{jk}} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}}_0 = \frac{\partial v}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

$$x_k = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_k^i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} x_k^i = \delta_{kj}$$

(QED D)

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- El teorema visto da estimaciones en norma  $L_\infty(K)$ . Ello no nos sirve para lograr estimaciones de  $\|u - \pi_h u\|_{H^1(\Omega)}$ .

### Notación:

$$|v|_{H^r(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=r} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$$

- No es norma, porque puede ser  $|v|_{H^r(\Omega)} = 0$ , con  $v \neq 0$  (ej:  $v = 1$ ,  $r \geq 1$ )
- $|v|_{H^r(\Omega)}$  mide la norma  $L_2(\Omega)$  de las derivadas parciales de  $v$  de orden igual a  $r$ . Luego, decimos que  $|v|_{H^r(\Omega)}$  es una *seminorma*.

**Teorema:** Sea  $K \in T_h$  un triángulo de vértices  $\mathbf{x}^i$ ,  $i=1,2,3$ . Dado  $v \in C^0(K)$ , sea el interpolante  $\pi v \in P_1(K)$  definido por  $\pi v(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x}_i)$ ,  $i=1,2,3$ . Luego,  $\exists C$  cte

$$\|v - \pi v\|_{L_2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)}, \quad |v - \pi v|_{H_1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}$$

Este teorema es similar al anterior, pero demostración más difícil (no la haremos).

## Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

Usando el teorema, podemos calcular

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in T_h} \|u - \pi_h u\|_{L_2(K)}^2 \leq \sum_{K \in T_h} C^2 h_K^4 |u|_{H^2(K)}^2 \leq C^2 h^4 \sum_{K \in T_h} |u|_{H^2(K)}^2 = C^2 h^4 |u|_{H^2(\Omega)}^2$$

Además, usando la propiedad de la triangulación  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{1}{\beta}$

$$|u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{K \in T_h} C^2 \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |u|_{H^2(K)}^2 \leq \sum_{K \in T_h} C^2 \frac{h_K^2}{\beta^2} |u|_{H^2(K)}^2 \leq \frac{C^2 h^2}{\beta^2} |u|_{H^2(\Omega)}^2$$

Luego, introduciendo  $\beta$  en la cte:

$$\|u - \pi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{Ch}{\beta} |u|_{H^2(\Omega)} = Ch |u|_{H^2(\Omega)}$$

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}$$

## Interpolación con polinomios de mayor grado

- Trabajando con polinomios de grado  $r \geq 1$  se tiene

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

- Si  $V_h \subset H^2(\Omega)$  podremos asegurar también

$$|u - \pi_h u|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{r-1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

Notar:

- La potencia de  $h$  cae con el orden de derivación del error
  - La cte  $C$  es independiente de  $u$  y de  $h$
- Si  $u$  no tiene la regularidad requerida, la potencia de  $h$  cae:

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^s |u|_{H^s(\Omega)} \quad |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1} |u|_{H^s(\Omega)}$$

con  $1 \leq s \leq r+1$

# Interpolación con polinomios de mayor grado

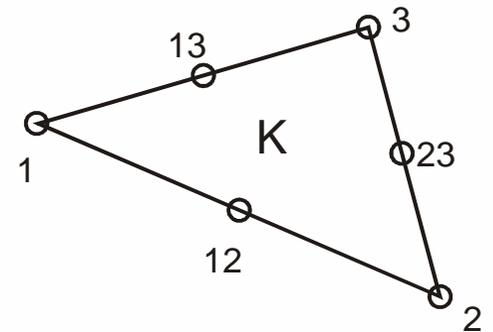
## 1. Ejemplo Sean

$\{T_h\}$  familia de mallas  $T_h = \{K\}$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 / \beta h \leq \rho$

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_2(K), \quad \forall K \in T_h \right\}$$

Para el elemento mostrado, definimos

$$\pi_h v = v \quad \text{en los nodos y puntos medios de } T_h$$



En este caso se verifica:

$$\|v - \pi_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^3 |v|_{H^3(\Omega)}$$

$$|v - \pi_h v|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 |v|_{H^3(\Omega)}$$

# Interpolación con polinomios de mayor grado

## 2. Ejemplo Sean

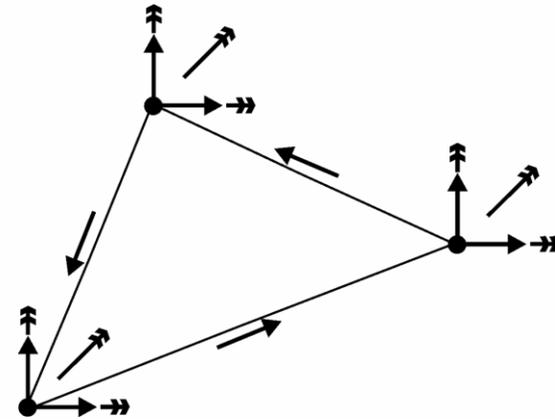
$\{T_h\}$  familia de mallas  $T_h = \{K\}$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 / \beta h \leq \rho$

$$V_h = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_5(K), \quad \forall K \in T_h \right\}$$

Para el elemento mostrado, definimos

$$D^\alpha \pi_h v = D^\alpha v \quad \text{en los nodos vértices de } T_h, \quad |\alpha| \leq 2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \pi_h v = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{en los puntos medios de lados de } T_h$$



En este caso se verifica:

$$\|v - \pi_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^6 |v|_{H^6(\Omega)}$$

$$|v - \pi_h v|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^5 |v|_{H^6(\Omega)}$$

$$|v - \pi_h v|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^4 |v|_{H^6(\Omega)}$$

# Estimaciones de error en MEF para problemas elípticos

Recordamos:

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h \quad \Rightarrow \quad \|u - u_h\|_V \leq C \|u - \pi_h u\|_V$$

Usamos luego las estimaciones de error de interpolación para el error del MEF.

3. **Ejemplo** Sea el problema

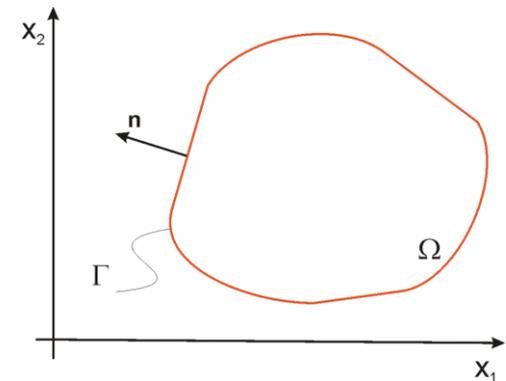
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

En este caso,  $V = H_0^1(\Omega)$  y elegimos

$$V_h = \{v \in V : v|_K \in P_r(K), \quad \forall K \in T_h\}$$

Usando la estimación de error de interpolación, logramos

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$



# Estimaciones de error en MEF para problemas elípticos

4. **Ejemplo** Sea el problema biarmónico

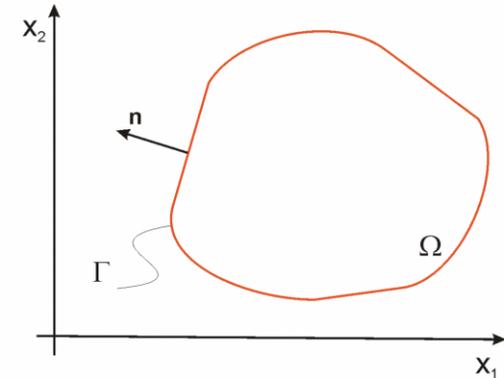
$$\begin{cases} \Delta\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

En este caso,  $V = H_0^2(\Omega)$  y si elegimos

$$V_h = \left\{ v \in V : v|_K \in P_5(K), \quad \forall K \in T_h \right\}$$

y usamos la estimación de error de interpolación, logramos

$$\|u - u_h\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^4 |u|_{H^6(\Omega)}$$



## Sobre la regularidad de la solución exacta

- Vimos que la regularidad de la **solución exacta**  $u$  influye sobre la estimación de error  $\|u - u_h\|_V$ . Veremos ahora que la regularidad de  $u$  depende de la regularidad de los datos

Sea el problema de Poisson

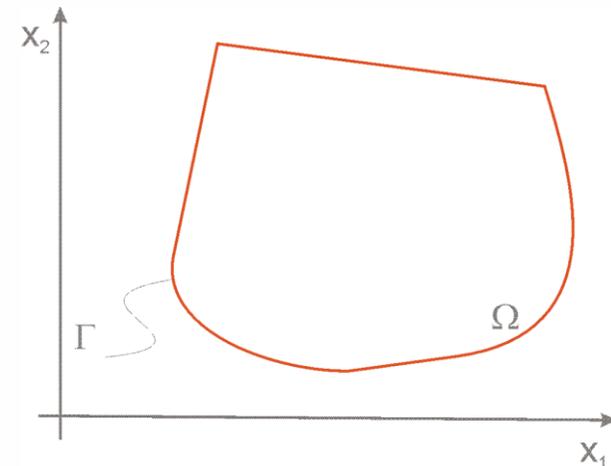
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

- Si  $\Gamma$  es suave, para  $s = 0, 1, \dots$  existe  $C$  indep de  $f$  tal que

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)}$$

o sea  $f \in H^s(\Omega) \Rightarrow u \in H^{s+2}(\Omega)$  ("ganamos 2 derivadas")

- Si  $\Gamma$  tiene esquinas,  $u$  o sus **derivadas tienen singularidades** en la esquina aún con  $f$  muy suave.

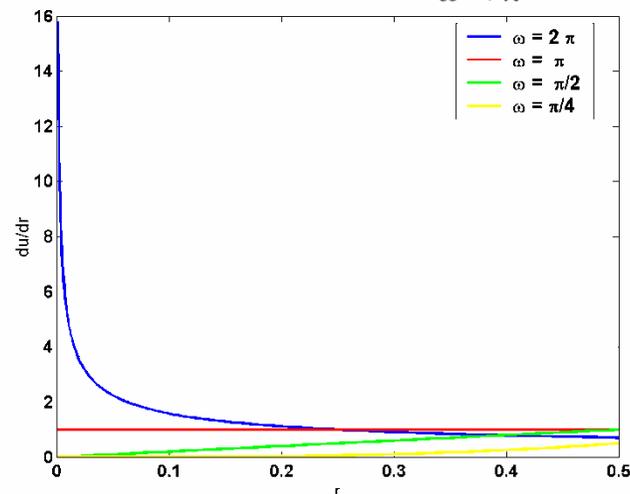
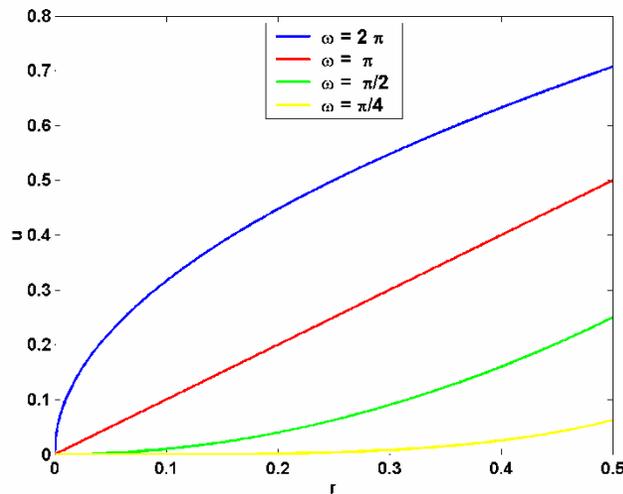
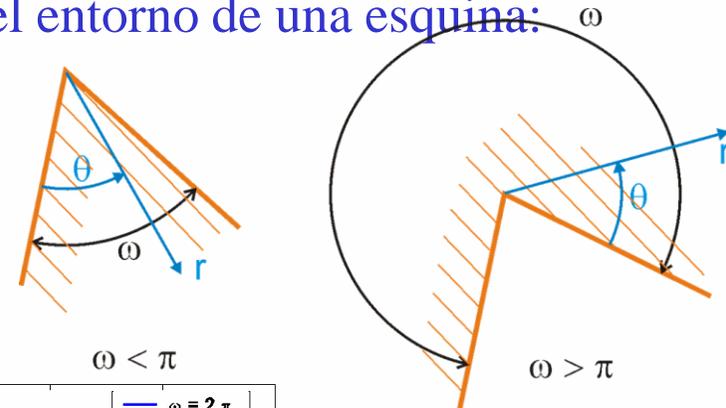


## Sobre la regularidad de la solución exacta (cont)

La solución  $u$  con  $f$  suave tiene la siguiente forma en el entorno de una esquina:

$$u(r, \theta) = r^{\pi/\omega} \alpha(\theta) + \beta(r, \theta)$$

con  $\alpha, \beta$  funciones suaves.



1. Claramente, si  $\omega > \pi \Rightarrow u \notin H^2(\Omega)$
2. Se puede mostrar que si  $\Omega$  poligonal convexo ( $\omega < \pi$ ),  $\Rightarrow u \in H^2(\Omega)$

## Sobre la regularidad de la solución exacta (cont)

- Sea el problema biarmónico 
$$\begin{cases} \Delta\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$
- Si  $\Gamma$  es suave, resulta  $\|u\|_{H^{s+4}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)} \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28b)$
- Si  $\Gamma$  no es suave y
  - $\omega < \pi \Rightarrow (4.28b)$  vale con  $s=0$
  - $\omega > \pi \Rightarrow u \notin H^4(\Omega)$

## Métodos adaptivos

1. Si la solución exacta tiene por ej. una singularidad en una esquina, es natural refinar la malla cerca de esa esquina para mejorar la precisión.

2. Dado el estimador de error  $|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq C \sqrt{\sum_{K \in T_h} (h_K |u|_{H^2(K)})^2}$  podríamos contrarrestar el tamaño de  $|u|_{H^2(K)}$  con el de  $h_K$ , tomando  $h_K$  pequeño allí donde  $|u|_{H^2(K)}$  sea grande.

3. Si  $u$  tiene la forma  $u(r, \theta) = r^{\pi/\omega} \alpha(\theta) + \beta(r, \theta)$ , con  $0 < \gamma = \frac{\pi}{\omega} < 1$ , una manera posible de refinar sería definiendo

$$h_K = Ch d_K^{1-\gamma} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_K : \text{distancia del elemento } K \text{ a la esquina} \\ h : \text{tamaño de la malla lejos de la esquina} \end{array} \right. \Rightarrow |u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$$

- **Nota:** el número de elementos así refinados es de igual orden  $O(h^{-2})$  que para una malla de  $h$  uniforme. Luego, el refinamiento no aumenta significativamente el número de incógnitas, pero sí la precisión.

## Métodos adaptivos (cont.)

En gral, se desconoce a priori la naturaleza de la solución exacta, por lo que no está claro cómo refinar la malla.

- **Métodos adaptivos**: métodos de refinamiento automático de la malla, que obtienen información sobre de la suavidad de la solución de resultados sobre una sucesión de mallas de refinamiento progresivo.
1. Dada una tolerancia  $\delta > 0$ , deseamos obtener por MEF una solución que satisfaga

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \delta \quad (4.33)$$

2. Dado el estimador de error por  $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sqrt{\sum_{K \in T_h} (h_K |u|_{H^2(K)})^2}$   
la condición 4.33 se satisfará si elegimos una malla  $T_h = \{K\}$  tal que

$$\sum_{K \in T_h} (h_K |u|_{H^2(K)})^2 \sim \left(\frac{\delta}{C}\right)^2 \quad (4.34)$$

## Métodos adaptivos (cont.)

3. La malla que satisfaga 4.34 se determina usando el siguiente procedimiento:

- I. Se parte de una malla  $\bar{T}_h = \{\bar{K}\}$  de  $\bar{N}$  elementos y se calcula la correspondiente  $\bar{u}_h$  por MEF, con la que se calcula la aproximación  $|\bar{u}|_{H^2(\bar{K})}$  a  $|u|_{H^2(\bar{K})}$ .
- II. Se construye una nueva malla  $T_h = \{K\}$  dividiendo en 4 triángulos iguales cada  $\bar{K} \in \bar{T}_h$  para los cuales

$$\left( h_{\bar{K}} |\bar{u}_h|_{H^2(\bar{K})} \right)^2 > \frac{1}{\bar{N}} \left( \frac{\delta}{C} \right)^2$$

(la malla se completa por subdivisión de triángulos para lograr compatibilidad).

- III. Se repiten los pasos I y II hasta que

$$\sum_{K \in T_h} \left( h_K |u|_{H^2(K)} \right)^2 \leq \left( \frac{\delta}{C} \right)^2$$

## Métodos adaptivos (cont.)

1. Podemos partir de otros estimadores de error, por ej.

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C \max_K \left[ h_K \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(K)} \right]$$

2. Se busca una malla  $T_h = \{K\}$  tal que

$$Ch_K \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(K)} \sim \delta \quad \forall K \in T_h$$

3. Se comienza con una malla gruesa, con la que se calcula una aprox. a  $\|D^\alpha u\|_{L_\infty(K)}$ . Se refina la malla subdividiendo los triángulos  $K$  que no satisfagan

$$Ch_K \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(K)} \leq \delta$$

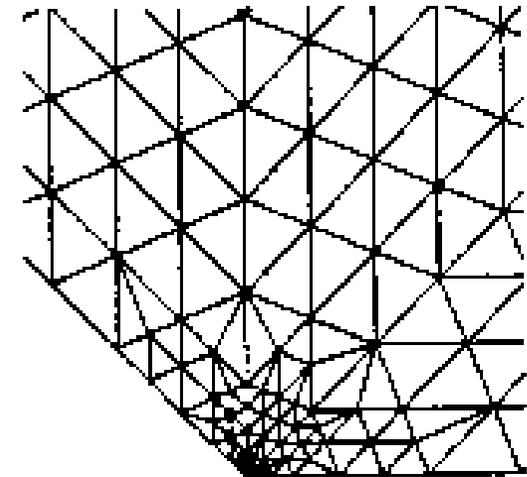
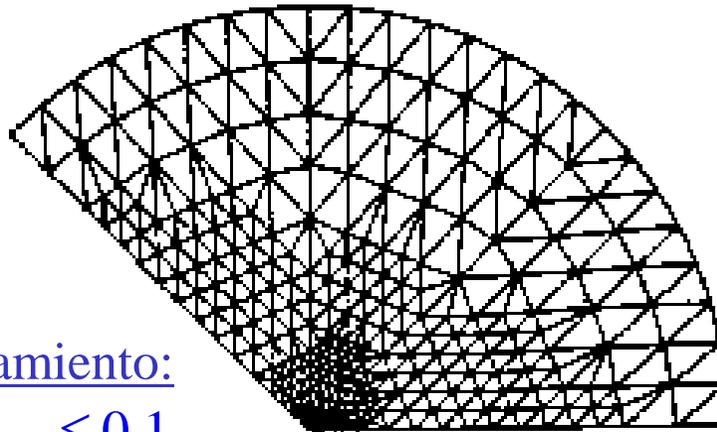
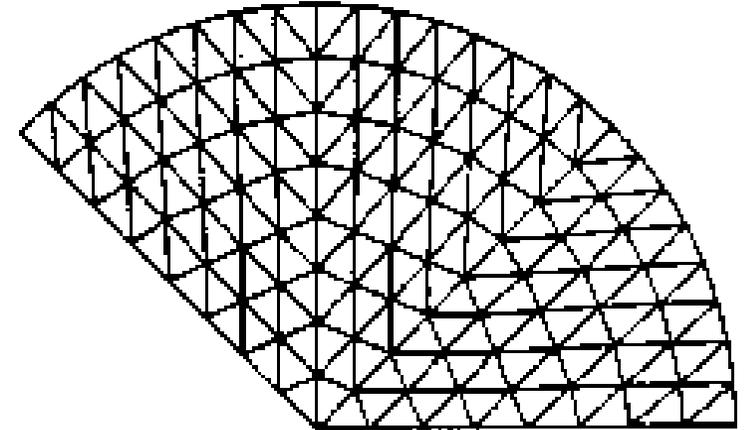
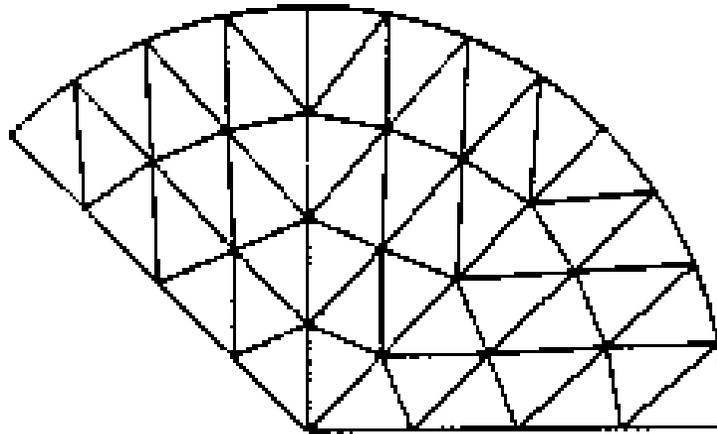
4. Se termina el proceso cuando todos los triángulos satisfacen la condición anterior.

# Refinamiento adaptivo

Problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$u = u_0 \quad \text{sobre } \Gamma$$



Criterio de refinamiento:

$$h_K \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(K)} \leq 0.1$$