

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina
19/08/2014

Introducción

Modelos matemáticos en ciencia e ingeniería ↔ Ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales

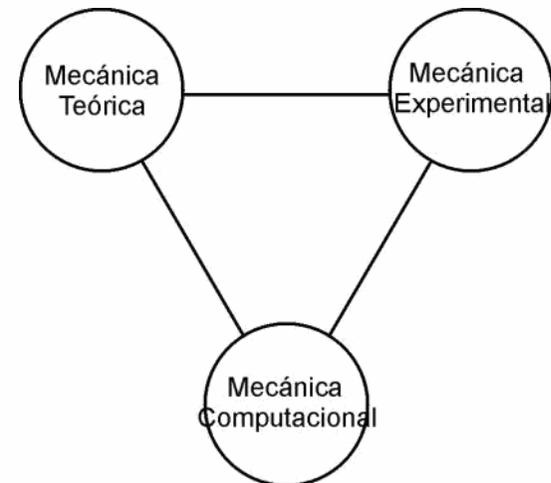
El desarrollo de las computadoras permitió usar estos modelos para resolver problemas prácticos. Se pueden simular y resolver sistemas altamente complicados en ciencia e ingeniería.

Permiten:

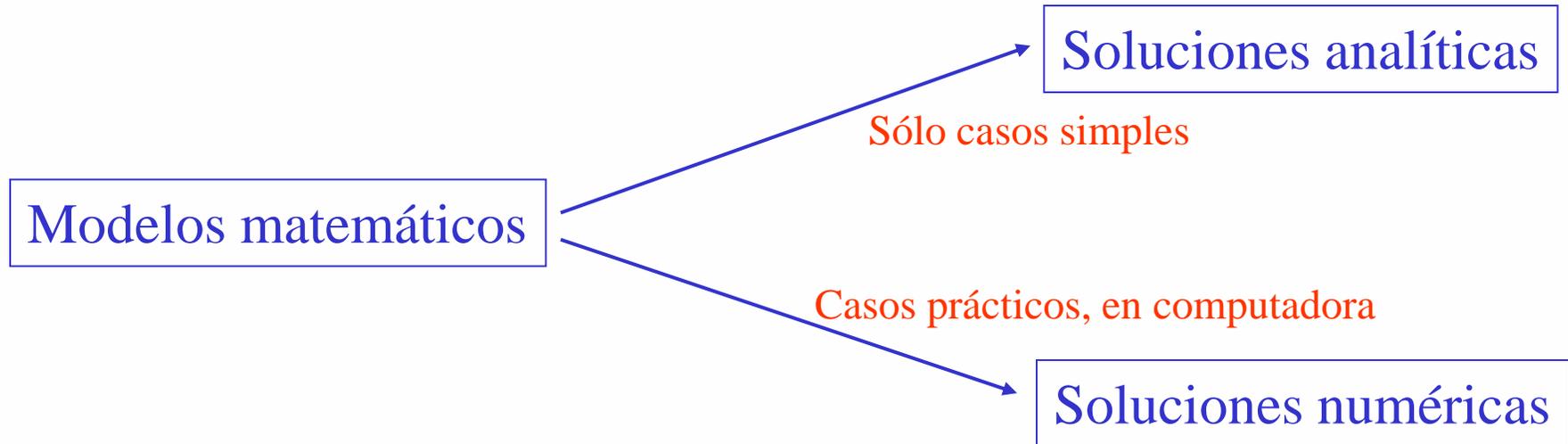
1. Reducir la necesidad de experiencias con modelos y prototipos (caras y lentas).
2. Comparar fácilmente distintas alternativas de diseño para llegar al *óptimo ingenieril*.

Disciplinas relacionadas:

1. CAD: Computer Aided Design
2. CAE: Computer Aided Engineering
3. CAM: Computer Aided Manufacturing



Introducción (cont)



Método de los Elementos Finitos (MEF) : técnica general para hallar soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales e integrales.

Origen: ingeniería estructural, años 50/60, para solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en elasticidad.

Su aplicación se generalizó, integrado a sistemas de CAD/CAE.

Introducción (cont)

Aplicaciones del MEF:

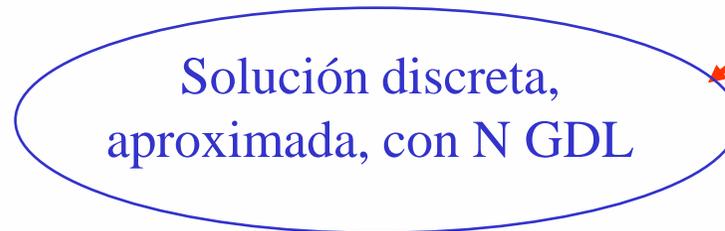
- Ingeniería estructural
- Resistencia de materiales
- Mecánica de fluidos
- Ingeniería nuclear
- Electromagnetismo
- Campos eléctricos
- Propagación de ondas
- Conducción del calor
- Procesos de convección – difusión
- Ingeniería de petróleo
- Procesos de reacción – difusión
-

Método de diferencias finitas vs. MEF

- Idea básica de un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales:



- El problema discreto puede resolverse en una computadora !!!



- Diferencias finitas: método numérico clásico para resolver ecuaciones diferenciales donde el problema discreto se obtiene reemplazando:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x}$$

Discretización en el MEF

1. Reformulación de la ecuación diferencial en un problema variacional equivalente.

Ej: en ecuaciones elípticas, en casos simples, toma la forma de problema de minimización:

$$(M) \quad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V$$

donde:

V : conjunto de funciones admisibles

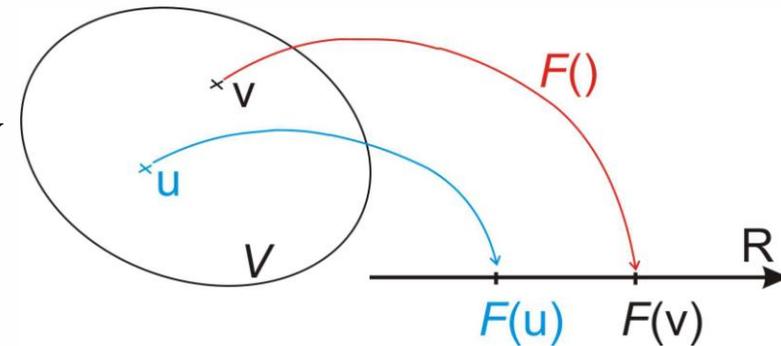
$F : V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional

$$F(v) \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

las funciones $v \in V$ a menudo representan cantidades que varían en forma continua (ej.. desplazamiento de un cuerpo elástico, temperatura, etc.)

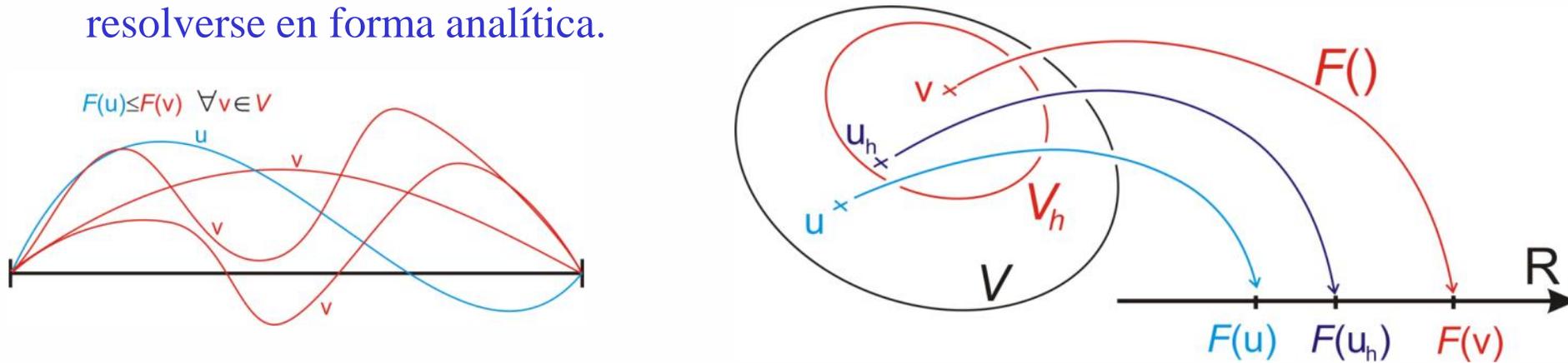
$F(v)$ es la energía total asociada a v .

(M) es una caracterización equivalente de la solución de la ecuación diferencial como aquella función en V que minimiza la energía total del sistema considerado.



Discretización en el MEF (cont)

2. En general, la dimensión de V es infinita (las funciones de V no pueden expresarse a través de un número finito de parámetros). Luego, (M) no puede resolverse en forma analítica.



Para hallar una solución, la idea del MEF es reemplazar V por un conjunto V_h de funciones simples que dependen de un número finito de parámetros:

$$(M_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h / F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in V_h$$

Este problema es equivalente a un sistema de ecs. algebraicas. Se espera que u_h sea una aproximación suficientemente buena de u , la solución de (M).

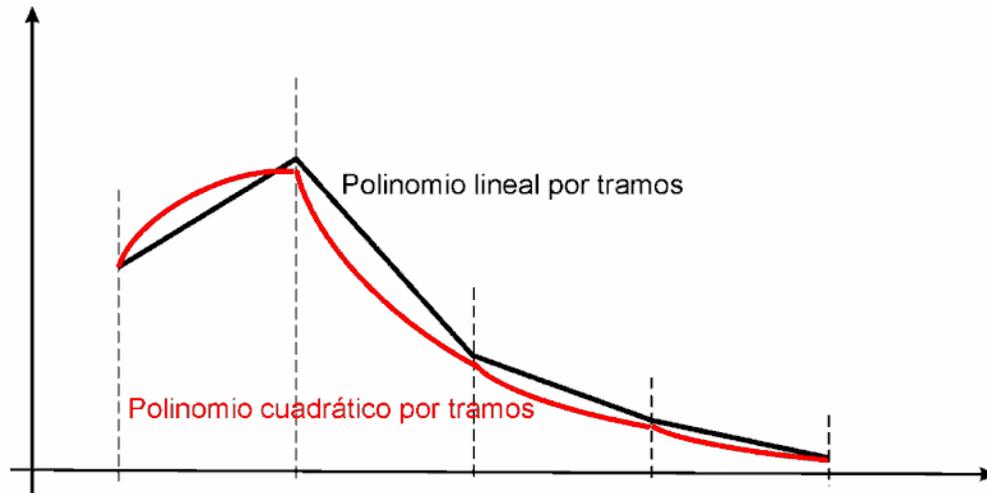
3. Usualmente elegimos:

$$V_h \subset V \quad / \quad v_h \in V_h \Rightarrow v_h \in V$$

En este caso, (M_h) corresponde al método clásico de Ritz-Galerkin

Discretización en el MEF (cont)

4. Característica particular del MEF: funciones de V_h son funciones polinomiales por tramos



Veremos más adelante que se pueden hacer formulaciones variacionales más generales que el problema de minimización; ej.: métodos de Galerkin

Pasos para resolver por MEF:

1. Formulación variacional del problema
2. Discretización por MEF: construcción del espacio dimensional finito V_h
3. Solución del problema discreto
4. Implementación del método en computadora: programación

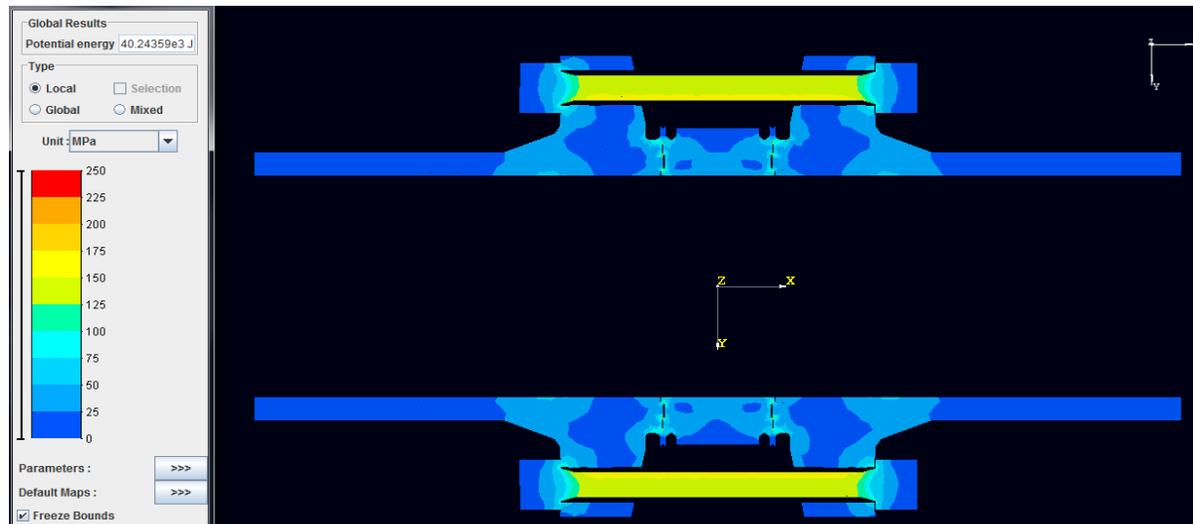
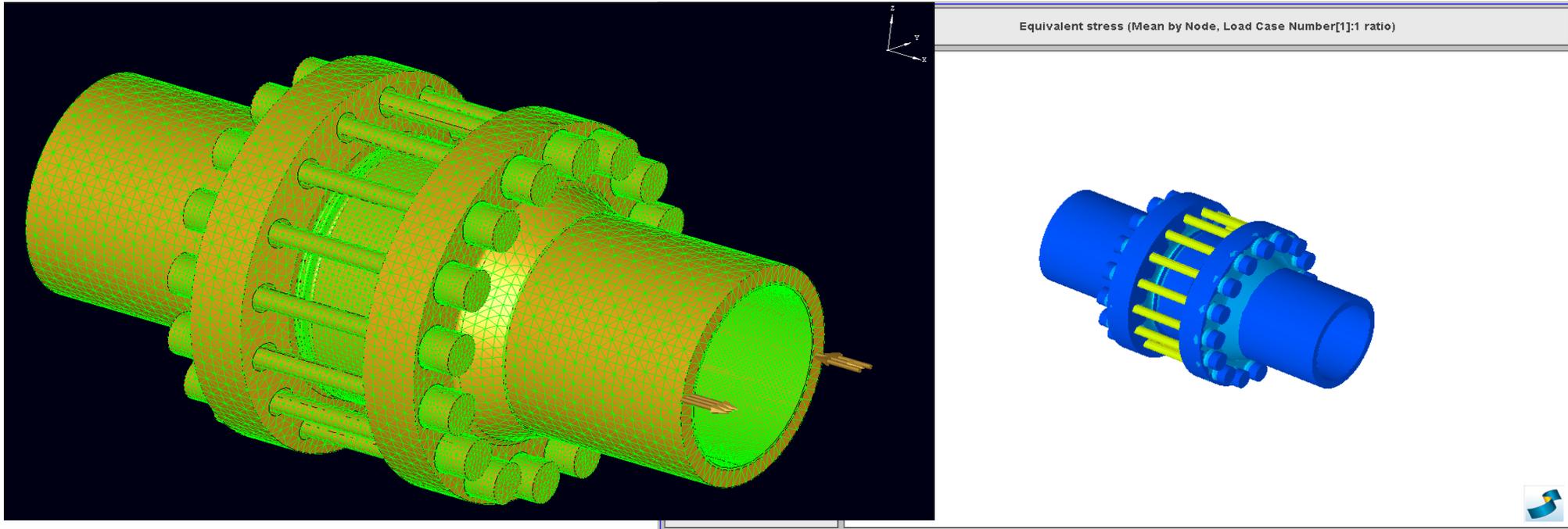
Comentarios

- Existen distintas formulaciones variacionales dependiendo, por ejemplo, de la elección de las variables independientes
- La elección del subespacio de aproximación de dimensión finita V_h , o sea la elección del tipo de elemento finito, está influenciada por:
 - Formulación variacional
 - Requerimientos de precisión
 - Propiedades de regularidad de la solución exacta
 - ...
- Para resolver el problema discreto necesitamos algoritmos de optimización y/o algoritmos de solución de grandes sistemas de ecs. algebraicas lineales o no lineales

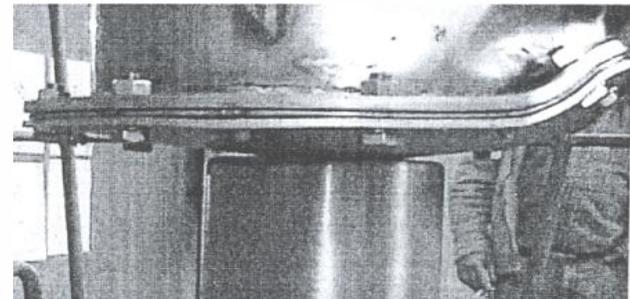
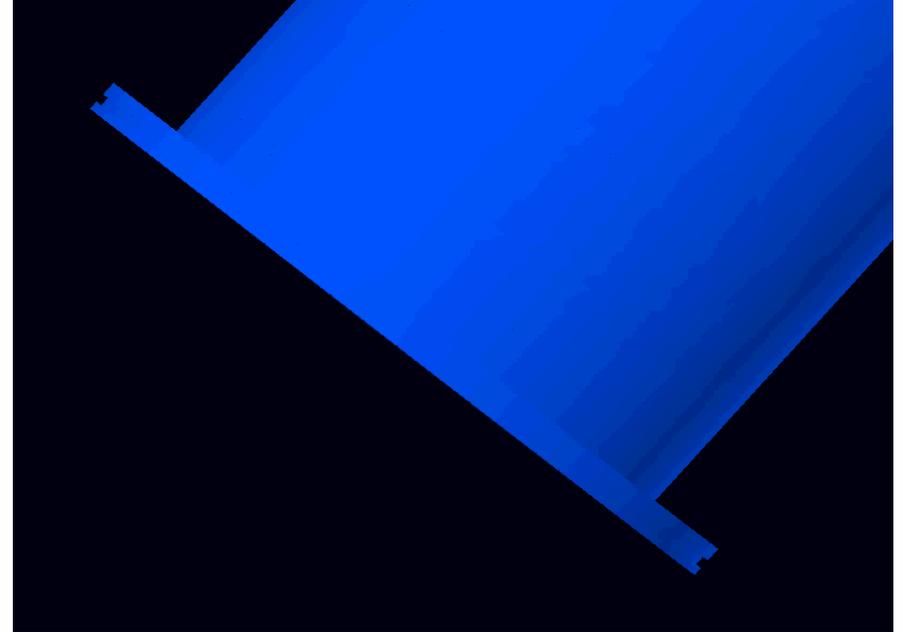
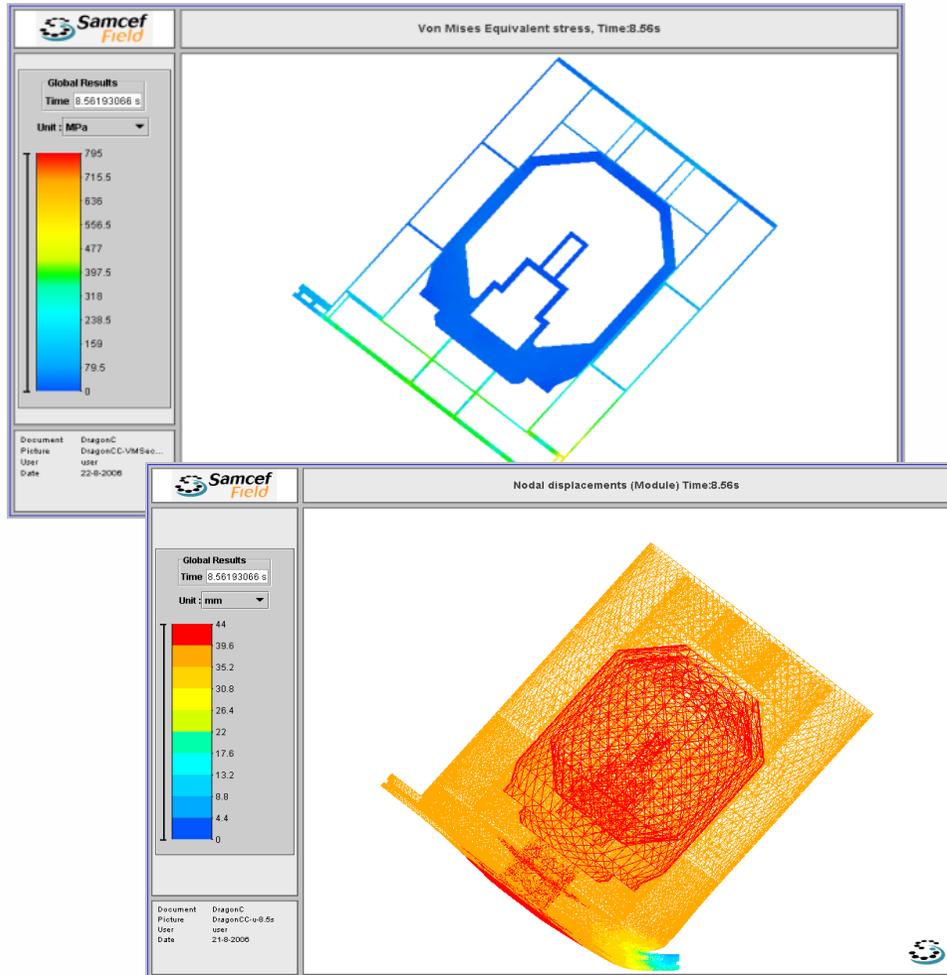
Ventajas del MEF respecto de DF

- Tratamiento de geometrías complicadas
- Condiciones de borde generales
- Propiedades materiales no lineales o variables
- La estructura clara del método permite crear códigos multipropósito generales
- Fundamentos teóricos sólidos
- Confiabilidad
- Posibilidad de estimación de error

Modelo para cálculo de tensiones en una brida

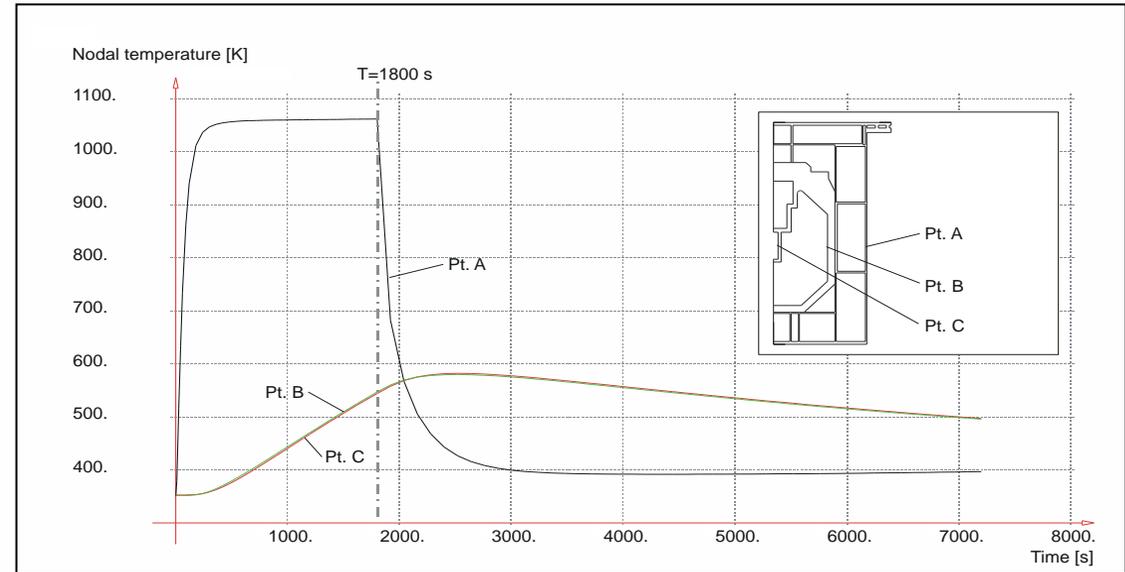
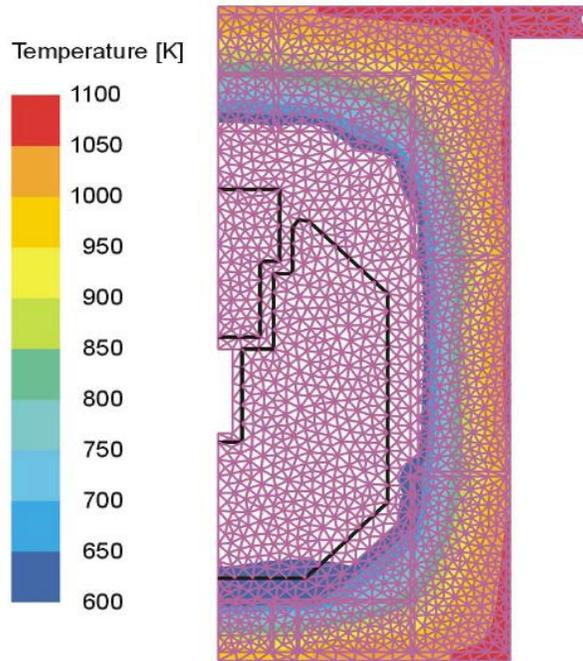


Verificación estructural de contenedor de material radiactivo



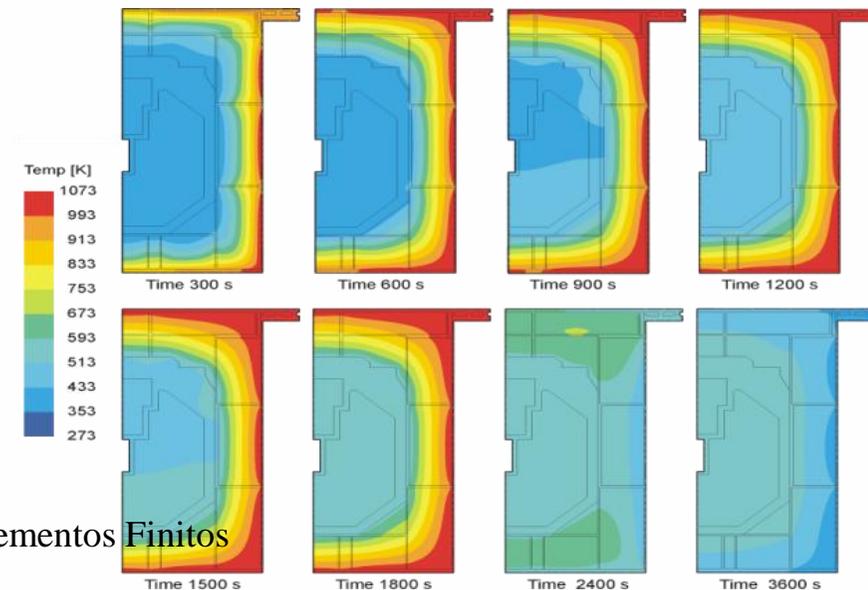
Verificación térmica de contenedor de material radiactivo

Verificación de daños por incendio

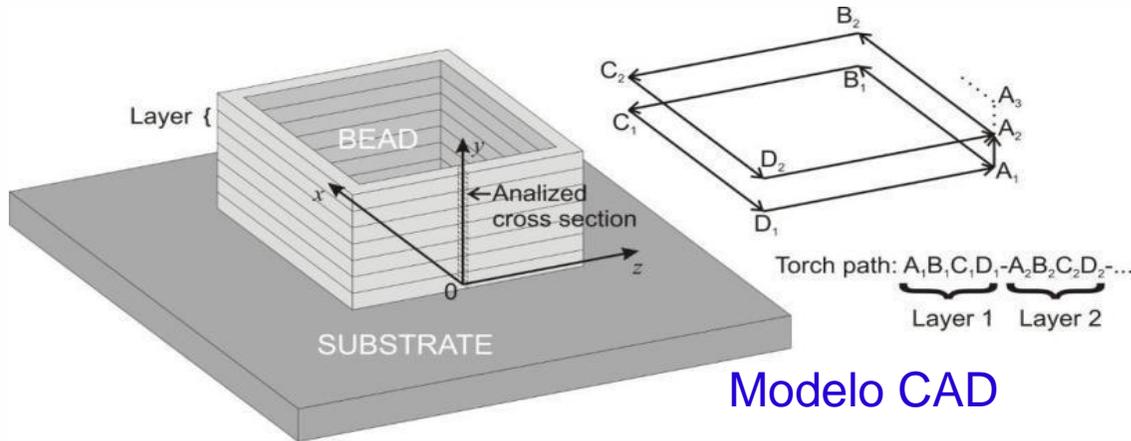


Evolución de temperaturas durante un incendio

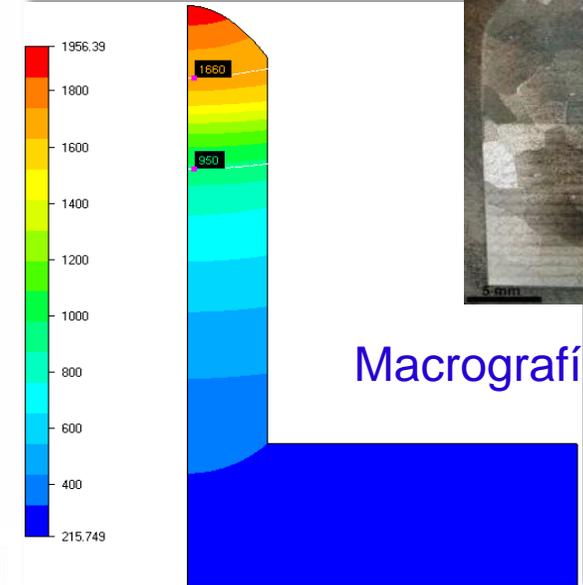
Objetivo: Verificar el cumplimiento de la reglamentación para contenedores de transporte.



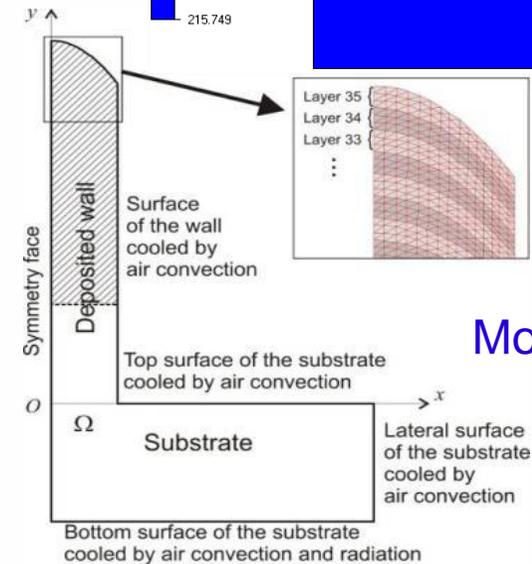
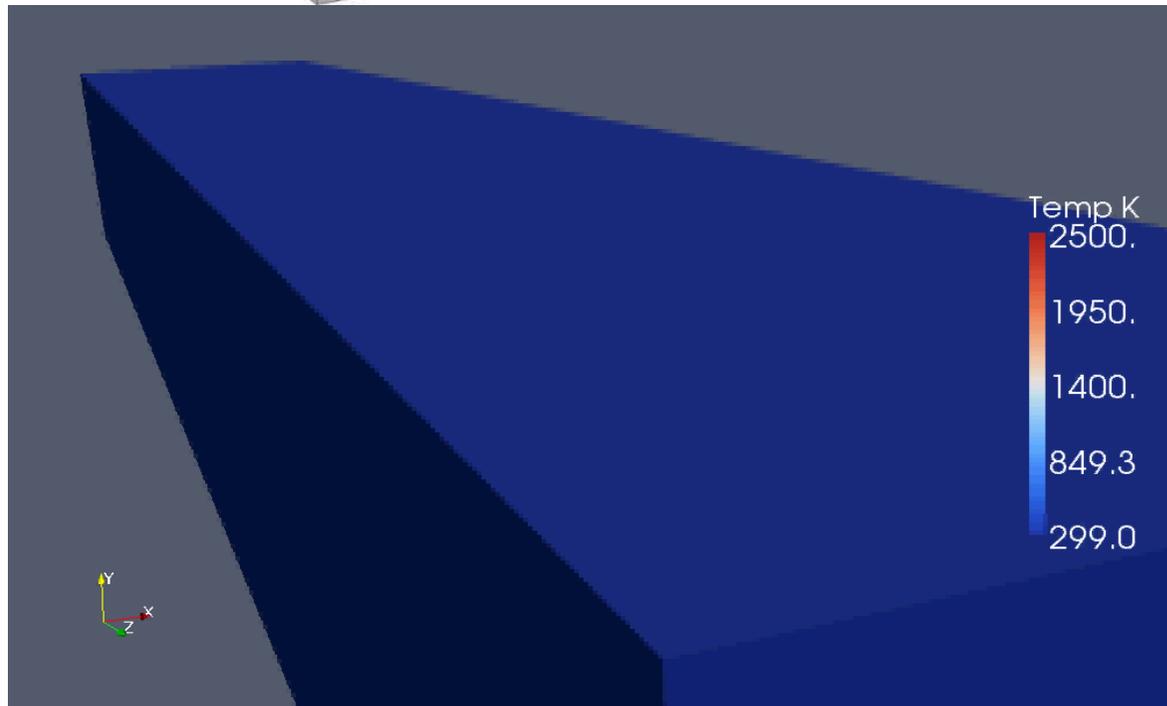
Simulación de SMD (shaped metal deposition)



Temperaturas



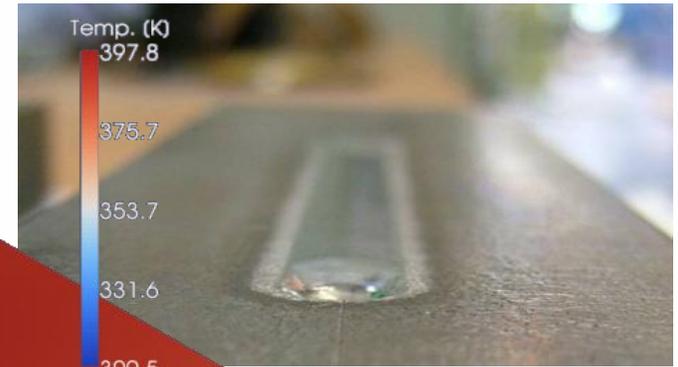
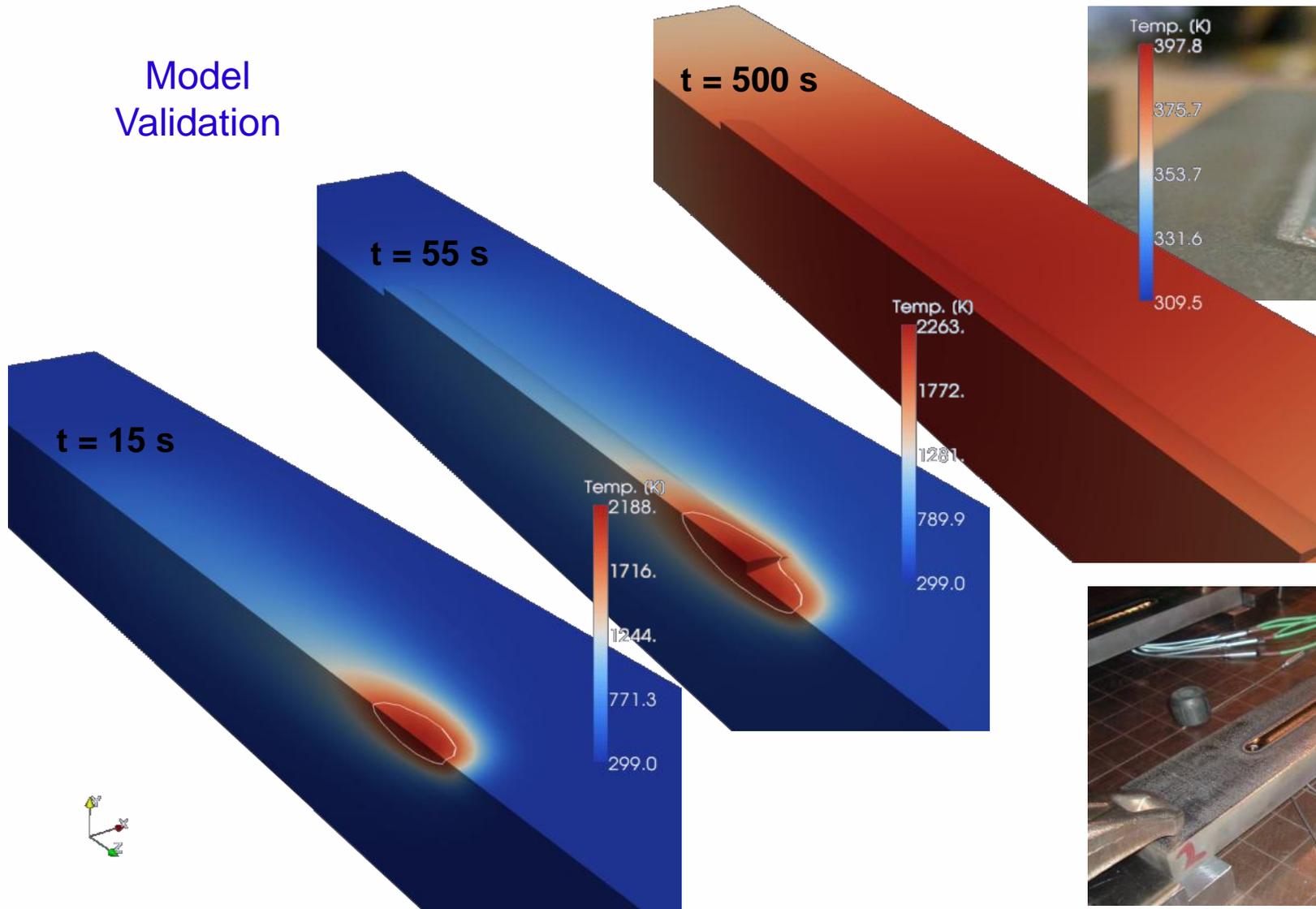
Macrografía



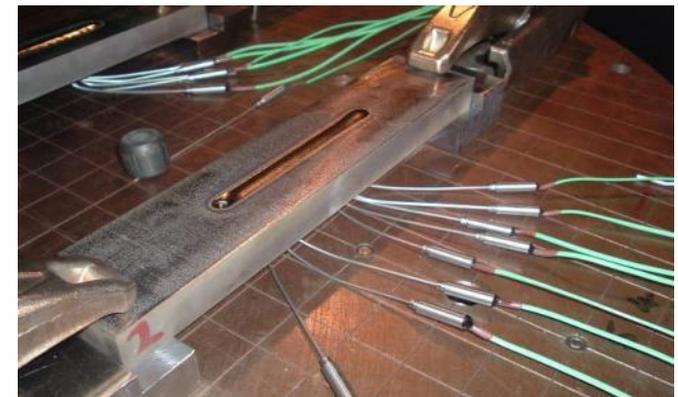
Modelo FEM

Simulation of shaped metal deposition process

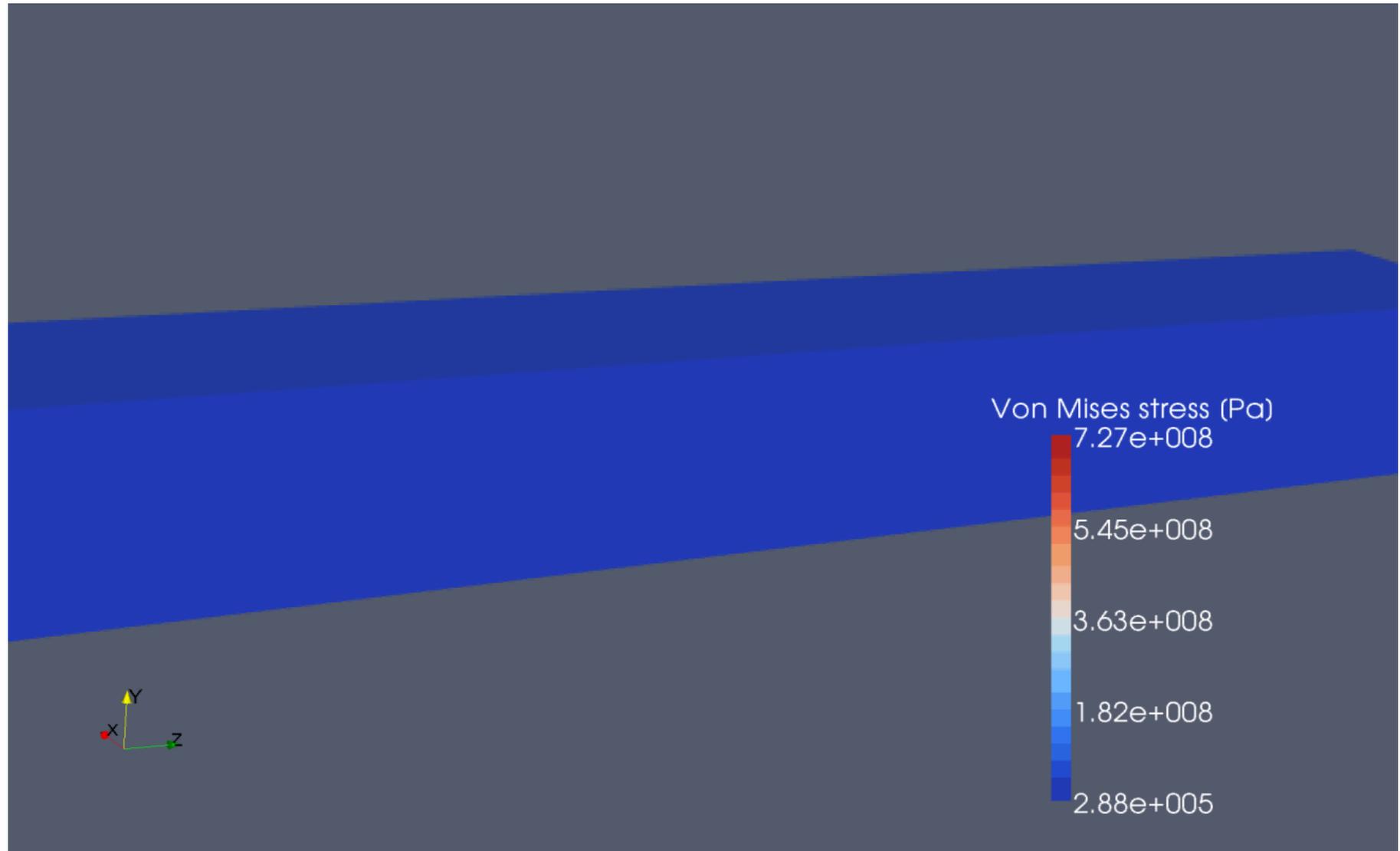
Model
Validation



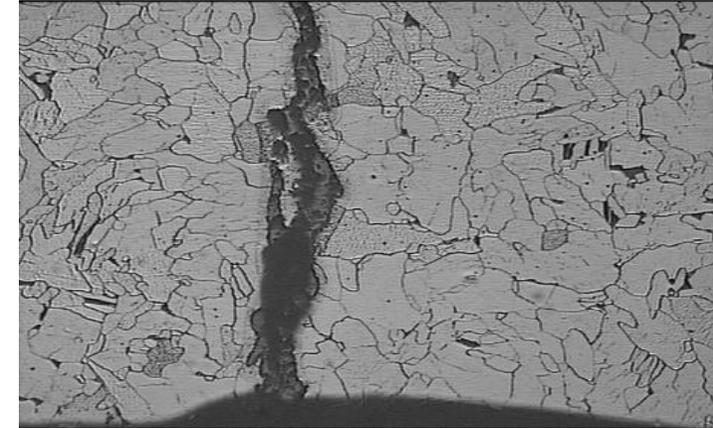
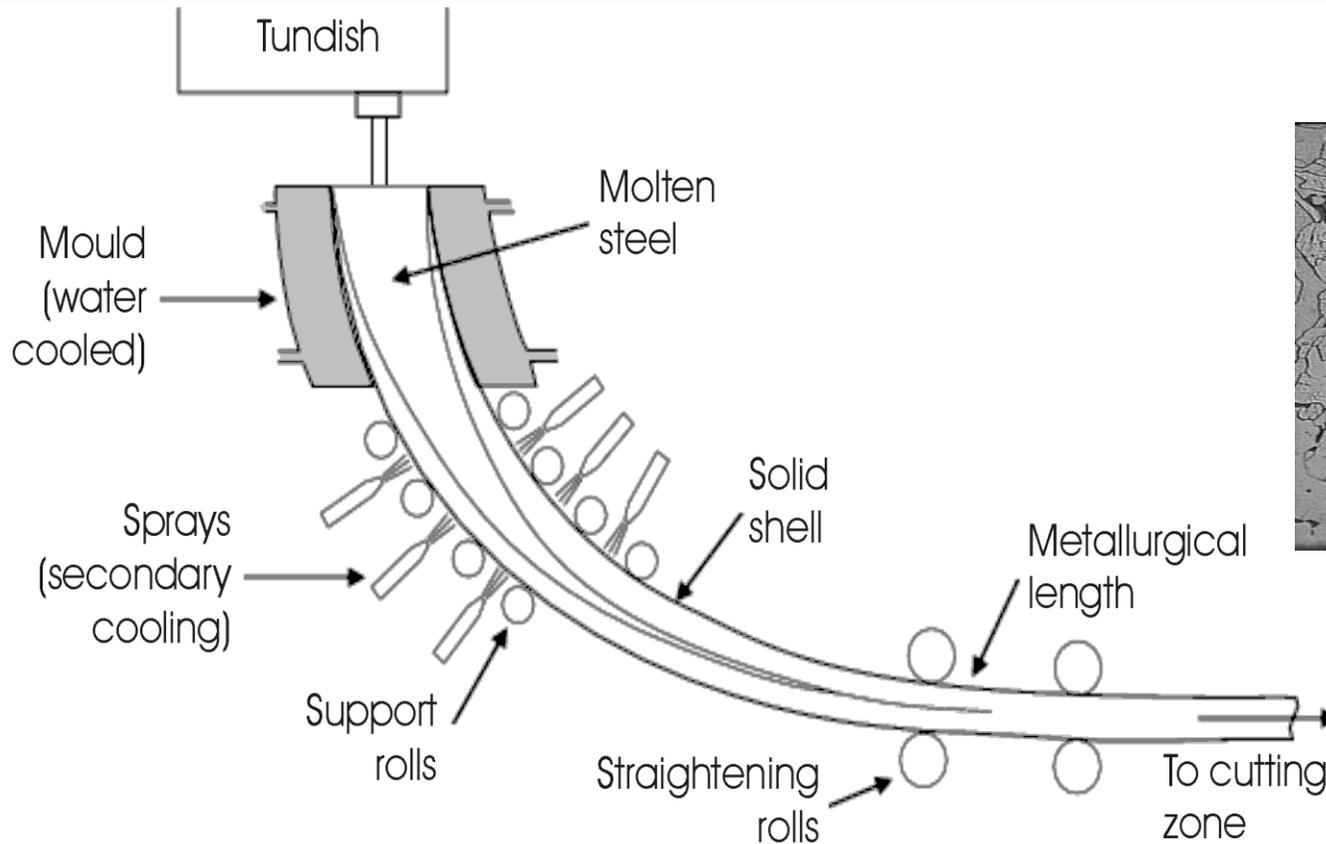
Proyecto RAPOLAC
(Unión Europea)



Simulación de SMD (shaped metal deposition)



Análisis de colada continua



Crack micrograph

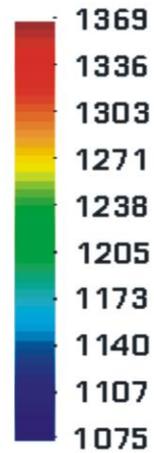
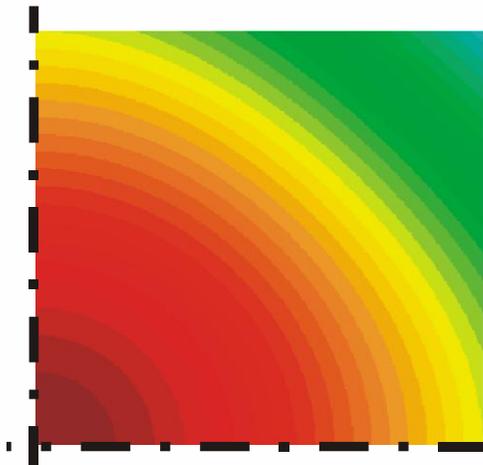
Objetivo: análisis termomecánico acoplado de la solidificación para determinación de temperaturas, deformaciones, tensiones, macrosegregación

Comitente: Instituto Argentino de Siderurgia

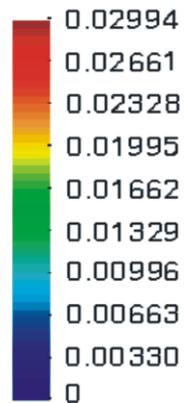
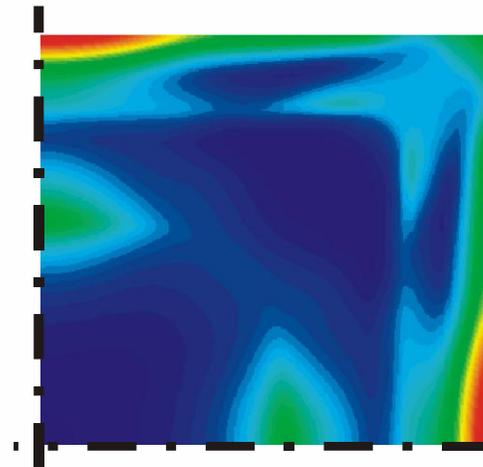
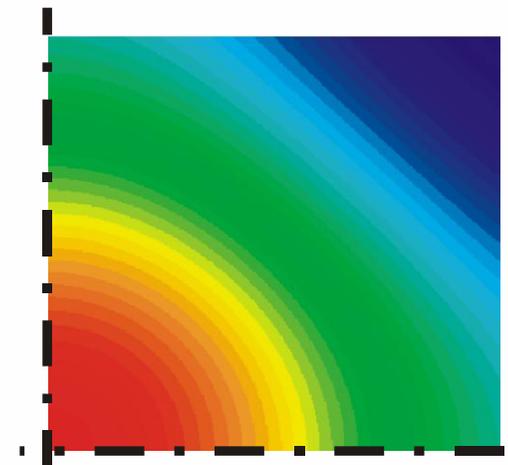
Análisis de colada continua

Two spraying regions (original)

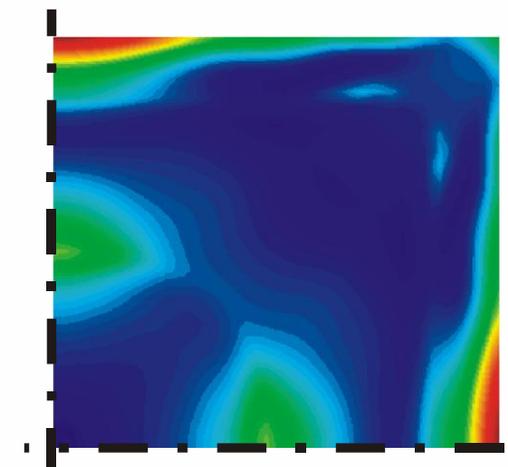
Three spraying regions (proposed)



Temperature [°C]

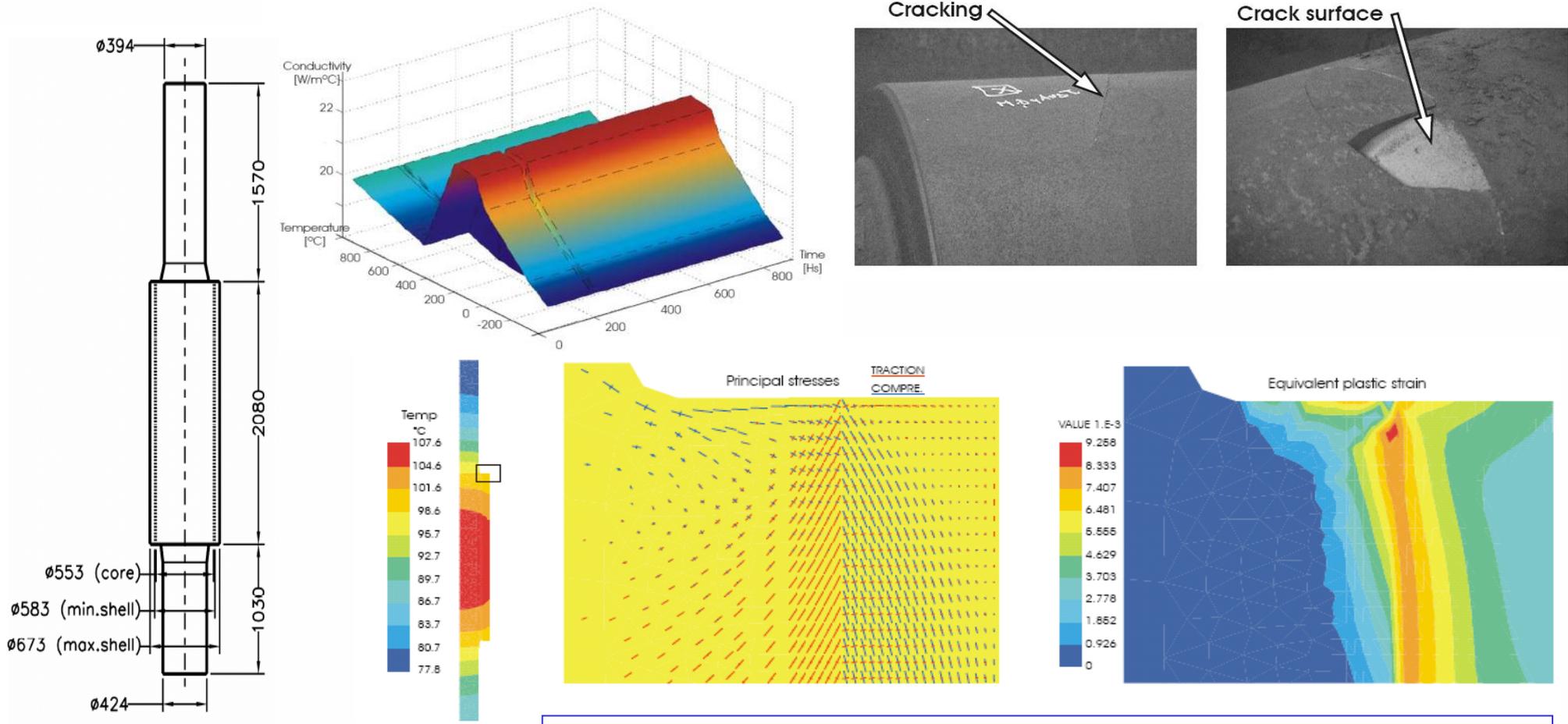


Plastic strain



Cross sections 10.5 m below meniscus

Simulación de tratamiento térmico de rodillos de laminación



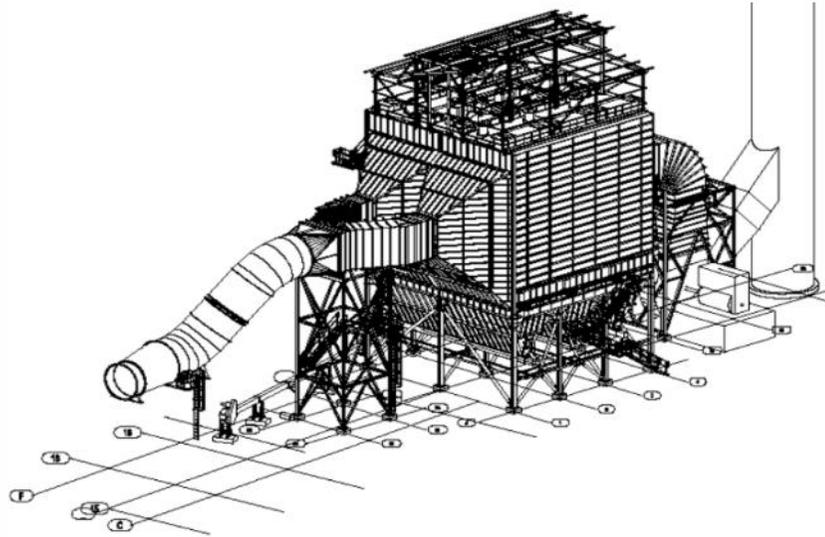
Análisis de temperaturas, tensiones y deformaciones plásticas

Objetivo: Análisis fisuración de rodillos de laminación tricapa de fundición blanca de alto Cr.

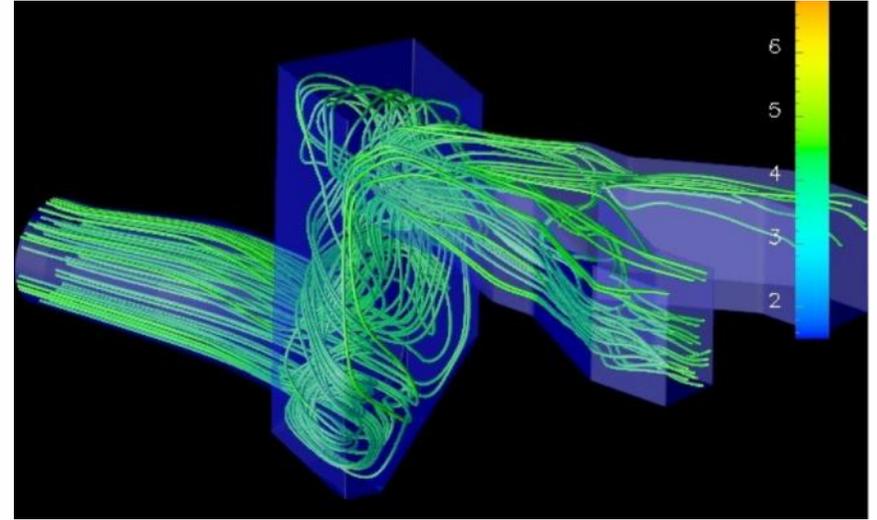
Comitente: Fundicion San Cayetano – Burzaco – Prov. Buenos Aires

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Reducción del depósito de polvo en una instalación de sinterizado



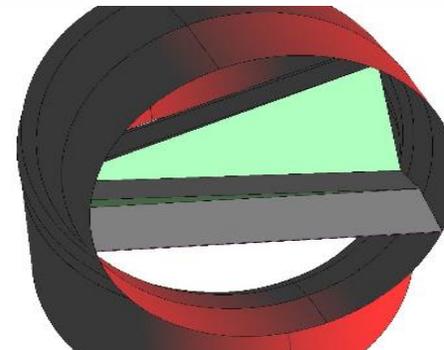
Precipitador electrostático y conducto de entrada planta SINTER



Patrón de flujo en la manga de entrada al precipitador

Objetivo: Optimizar el patrón de flujo en el conducto principal del sistema, para minimizar la deposición de partículas sólidas.

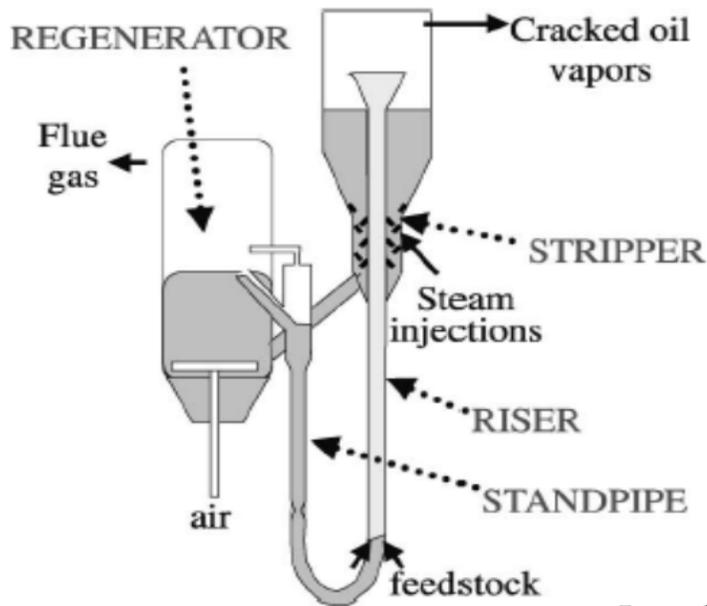
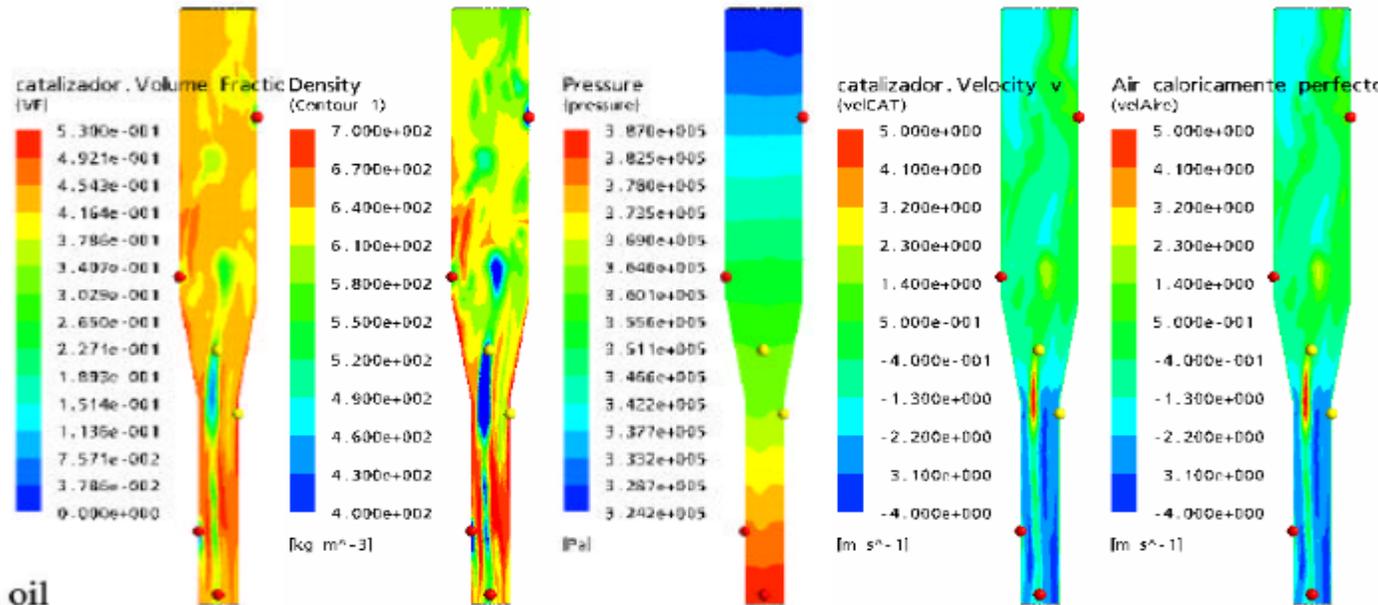
Comitente: Ternium Siderar, San Nicolás (Bs.As.)



Deflector diseñado para reducir la deposición

Sistema de aireación en standpipe de equipo de cracking

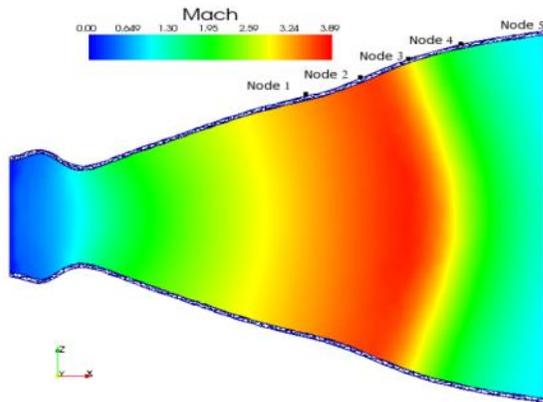
La aireación es necesaria para mantener los sólidos fluidizados. Una aireación insuficiente produce un flujo irregular y poca diferencia de presión, en tanto una sobreaireación puede conducir a un flujo intermitente y reducida diferencia de presión.



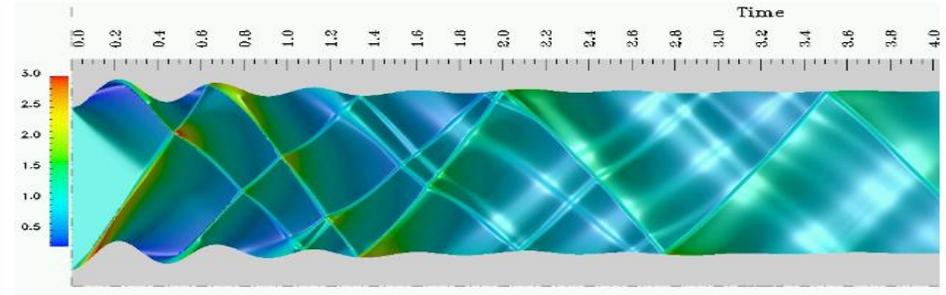
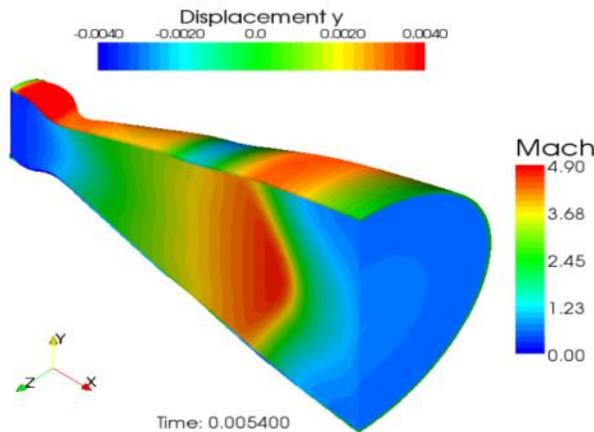
Objetivo: Determinar la influencia de los diferentes puntos de aireación en la fluidización de la mezcla gas-catalizador, para mejorar la eficiencia del equipo de cracking.

Comitente: Repsol YPF, Ensenada (Bs.As.)

Análisis de interacción fluido estructura en régimen compresible

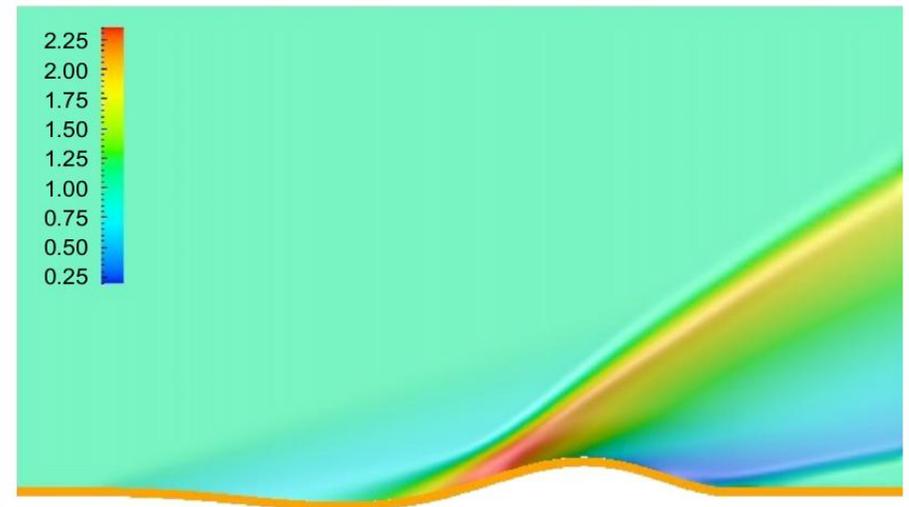


Encendido de un motor cohete.
Deformación de la estructura debido a la onda de choque



Propagación de ondas de choque en un contenedor de gas detenido súbitamente

Determinación del número de Mach crítico para flujo sobre una placa plana



Objetivo: Desarrollar un código con acoplamiento bidireccional entre el análisis estructural y el análisis fluidodinámico.

Comitente: Open Engineering - ESTEC/ESA

Programas

- Usaremos un programa en Matlab / Octave, que distribuimos a través de la página del curso, y sobre el cual realizarán programación
- Además, haremos algunos prácticos con un programa comercial. Si disponen de un programa, pueden usarlo. De lo contrario, pueden procurarse el siguiente:

Samcef-Student (versiones disponibles en internet o de lo contrario, para uso en red CIMEC)